

軌間が変化する水平レール上の円錐車輪

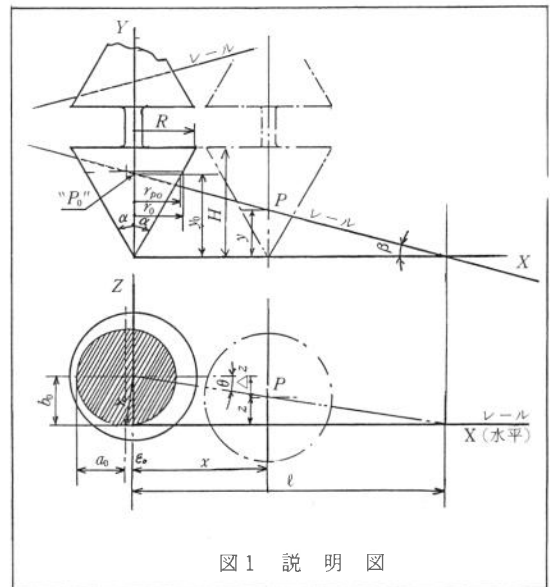
手 嶋 桓

1. ま え が き

レールが水平に敷設されていても、その軌間に変化を与えるとき、円錐車輪の場合は、接点の偏心的ためトルクが働いて、自走する性質をもつことになる。軌間変化率が一定の真直レール上におかれた一組の対向する完全円錐体の車輪が、自転して円錐頂点がレール面に達すると、回転は持続するが線速度はなくなって静止せざるを得なくなる。途中に現れる最高速度は自走距離が、いくらのところで見われて、その大きさはいくらか、またそれらは何の影響をどのように受けるか等を理論的に解明してみた。

2. 使用される記号 (図1) 参照

- H : 円錐の高さ
- R : 円錐の底面半径
- α : 円錐頂角 $\times 1/2$
- β : レール拡がり角 $\times 1/2$
- θ : 車輪降下角
- P : レールを含む鉛直面に円錐中心線が交わる点
- X, Y, Z : 直交3軸
- x, y, z : P点の座標
- r_p : P点を含む円錐直断面半径
- r : ころがり半径
- a, b : レールを含む鉛直面が円錐を切る断面のX-Z面に投影するだ円の長径および短径
- ϵ : だ円断面中心の円錐軸に対するX方向の偏心率 (負荷偏心率)
- l : 最大走行距離 (円錐頂点がレール面に到達したときの x 値)



- v : 車輪の真速度
 V : 車輪の水平速度
 ω : 車輪の角速度
 W_c, m_c : 車輪の重量, 質量
 g : 重力加速度
 I, k : 車輪の質量慣性モーメントおよびその回転半径
 添記号. : 初期の静止状態を示す

3. 記号間の関係

- (1) $l = y_0 / \tan \beta = z_0 / \tan \theta$ 《 $\tan \beta$: 軌間変化率, $\tan \theta$ = 車輪降下率》
 (2) $x = (y_0 - y) / \tan \beta = \Delta z / \tan \theta$ 《 $\Delta z = z_0 - z$: 車輪落差》
 (3) $l - x = y / \tan \beta = z / \tan \theta$
 (4) $r = (l - x) \tan \theta / \cos \theta = (l - x + \epsilon) \sin \theta = (l - x + \epsilon) \tan \alpha \cdot \tan \beta$
 (5) $\sin \theta = \tan \alpha \cdot \tan \beta$
 (6) $\epsilon = (l - x) \tan^2 \theta = r \cdot \sin \theta = z \cdot \tan \theta$
 (7) $r_p = y \cdot \tan \alpha = (l - x) \sin \theta$
 (8) $(l - x) = r_p / \sin \theta$, $r = r_p / \cos^2 \theta$, $\epsilon = r_p \tan \theta / \cos \theta$
 (9) $\left\{ \begin{array}{l} a = (l - x) \tan \theta / \cos \theta = r \quad \langle (a + \epsilon) / \tan \alpha = (l - x + a + \epsilon) \tan \beta \rangle \text{ の関係より} \\ b = (l - x) \tan \theta = z \\ b / a = \cos \theta \end{array} \right.$

4. 車輪速度

本節では、車輪の構成は対向円錐体のみとし、他の質量体による負荷については次節で考えることにした。車輪がレールに接する点から ϵ だけ離れて重力が働くので、この重力のモーメント $W \cdot \epsilon$ が車輪を自走させる回転モーメントになる。この偏心量 ϵ は、式(6)に示したように、車輪の位置によって変化するため、回転モーメントもこれに比例して変化する。車輪が x だけ転動したことによって消費した位置エネルギーは、運動エネルギーとして保有されると考えると

- (10) $W_c \cdot x \cdot \tan \theta = (m_c \cdot v^2 + I \cdot \omega^2) / 2$
 (11) $W_c = m_c \cdot g$: $\omega = v / r$: $r = (l - x) \tan \theta / \cos \theta$
 (12) $v = [2g \cdot x \cdot \tan \theta / \{1 + I / (m_c \cdot r^2)\}]^{1/2}$
 $V = v \cdot \cos \theta$ (水平速度)
 (12a) $v = [2g \cdot x \cdot \tan \theta / (1 + k^2 / r^2)]^{1/2}$: $I = m_c \cdot k^2$

車輪は左右対象であるから、上式は片側車輪について考えた。式(12)から最大速度を得るための条件を求めると

$$(13) \quad (3x - \ell) / (\ell - x)^3 = (m_c / I) (\tan \theta / \cos \theta)^2$$

この式の右辺が正值であることから、走行速度の最大値は、上式を満足させる転動距離 x であり、次の範囲内になければならないことになる。

$$(14) \quad \ell > x > \ell / 3$$

5. 速度を左右する因子

前節は円錐車輪だけが質量体であり、他の負荷を無視したが、ここでは回転質量体として円錐車輪のみを考え、この外に非回転体による車輪への負荷を導入した。車輪が、拡がりレールのどの位置から始動するかを考えることによって、円錐体以外の回転質量が存在すると考えた。検討を容易にするために、次の3つの係数を考えた。

- * $K_1 = x / \ell$: 比距離
- * $K_2 = y_0 / H = r_{p0} / R$: 初期条件
- * $K_3 = W_c / W = m_c / m$: 重量比 (質量比) 《 W, m : 全負荷, 全質量》

速度に関連する寸法にこれらの係数を用いると

- * $\ell = K_2 \cdot H / \tan \beta = K_2 \cdot R / \sin \theta$
- * $x = K_1 \cdot K_2 \cdot H / \tan \beta = K_1 \cdot K_2 \cdot R / \sin \theta$
- * $(\ell - x) = (1 - K_1) K_2 \cdot H / \tan \beta = (1 - K_1) K_2 \cdot R / \sin \theta$
- * $r = (1 - K_1) K_2 H \tan \alpha / \cos^2 \theta = (1 - K_1) K_2 \cdot R / \cos^2 \theta$
- * $I = m_c \cdot k^2 = K_3 \cdot m \cdot k^2$
- * $(k / r)^2 = (k / R)^2 \cdot \cos^4 \theta / [(1 - K_1) \cdot K_2]^2$
 $= (3/10) \cos^4 \theta / [(1 - K_1) K_2]^2$ 《完全円錐体》

したがって式(12)は次のように書き改められる。

$$(15) \quad v = \left(\frac{2g \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot R / \cos \theta}{1 + \frac{0.3 K_3 \cdot \cos^4 \theta}{(1 - K_1)^2 K_2^2}} \right)^{1/2} \quad \langle \text{真速度} \rangle$$

$$(15a) \quad V = \left(\frac{2g \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot R \cos \theta}{1 + \frac{0.3 K_3 \cdot \cos^4 \theta}{(1 - K_1)^2 K_2^2}} \right)^{1/2} \quad \langle \text{水平速度} \rangle$$

上式から速度でまたは V と比較離 $K_1 (= x / \ell)$ の関係に、初期条件 $K_2 (= y_0 / H)$ 、重量比 $K_3 (= W_c / W)$ 、円錐底面半径 R および車輪降下角 θ がどのような変化を与えるかを $V - K_1$ 線図から推定することができる。それ以外には速度に影響を及ぼす因子がないことも明らかである。円錐頂角 α とレール拡がり角 β が式に含まれていないが、式(5)に示すように、降下角 θ がこれらを包含しているためである。

6. 速度変化の実態

速度に影響を及ぼす因子のうち、底面半径はその平方根に正比例して速度が変化しますが、その他の因子については速度式からの推定は容易でない。このためある特定の状態を設定し、この $V - K_1$ 曲線に、それぞれの因子を変化させた $V - K_1$ 曲線を重ねることによって、それぞれの影響を推理することにした。

* 設定した特定状態

$$R = 0.15 [m] : \alpha = 15 [deg] : \beta = 15 [deg]$$

$$\theta \approx 4.12 [deg] : K_2 = 0.8 : K_3 = 1.0$$

6. 1 θ の影響 (図2) (表1)

$\theta = \arcsin(\tan \alpha \cdot \tan \beta)$ であるから、 θ の影響ということは、 α および β の変化ということになる。ここでは $\alpha = 15^\circ$ 一定とし、 β に 5° 間隔で $5^\circ \sim 30^\circ$ と変化を与えると、表1に示すように θ は $1.34^\circ \sim 8.90^\circ$ の変化となるが、この6つの θ に対する $V - K_1$ 曲線を重ねると図2に示すように、これ等は重り合って1つの曲線に近い。その差異は最高速においてもきわめて小さいことが表2でわかる。

すなわち、円錐底面が同じであれば、円錐の頂角またはレールの拡がりを変えても速度—比距離の関係にはほとんど影響を及ぼさない。したがって同程度の最高速度が得られる。

しかしながら比距離が同じであっても、全走行距離 l が降下角 θ によって異った値になる ($l = K_2 \cdot R / \sin \theta$) ので、 $V - K_1$ 曲線は重っても $V - x$ 曲線は重なることはない。表1に主要関連数値を示す。

6. 2 K_2 の影響 (図3) (表2)

r_{p0} / R または y_0 / H を K_2 としたので、 K_2 はレールをどの位置に車輪をおいて転がしたかによって値が定まるので初期係数と名付けた。 K_2 に

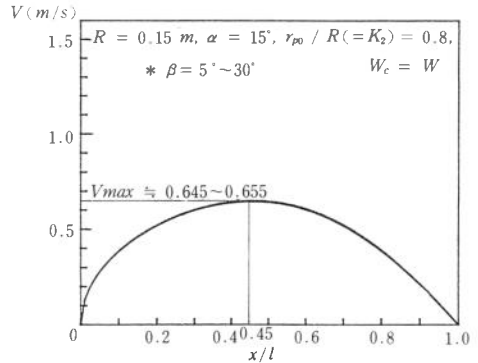


図2 車輪降下角の影響

表1 θ の影響

〈 $R=0.15(m)$, $K_2=0.8H$, $K_3=1.0$, $\alpha=15^\circ$ 〉

β	* θ	l (m)	$V_{max}(m/s) : K_1=0.45$
5°	1.343°	5.119	0.6446
10°	2.708°	2.540	0.6450
15°	4.117°	1.761	0.6457
20°	5.597°	1.230	0.6467
25°	7.178°	0.960	0.6481
30°	8.899°	0.776	0.6550

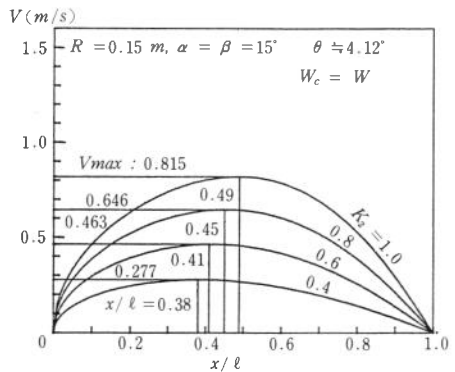


図3 始動位置の影響

1.0, 0.8, 0.6, 0.4の値を与えた場合の $V-K_1$ 曲線を図3に、計算による関連数値を表2に示す。 K_2 を小さくする程最高速度も、そのときの比距離も小さくなっていくが、式(14)あるように比距離(x/ℓ)が1/3以下にならないことは曲線からも伺える。また K_2 が小さい

ことは、車輪以外の回転質量体が附加しているとも考えられる。したがって、レールと接する円錐断面の小さいところから転がり始めると、全走行距離が短くなるだけでなく、早く最高速度に達しその速度も小さい。また、円錐車輪以外の回転質量体が大きくなると、早く最高速度に達すると考えられる。

6. 3 K_3 の影響 (図4) (表3)

円錐車輪以外の回転質量体を無視し、レールにかかる負荷を W とすると、 $W - W_c$ は非回転体の負荷である。 W_c/W はレールにかかる負荷のうちの円錐車輪重量の占める割合で、 K_3 とし、重量比と名付けた。 K_3 を1.0, 0.1, 0.01, 0.001とする4曲線を $V-K_2$ 線図に重ねて図4に、その主要計算数値を表3に示した。

非回転体の重量割合が増して K_3 が小さくなると、全体的に速度が増して最高速度が大きくなり、最高速に達するのが遅くなっていくのが図によく現れている。この場合は全走行距離が同じであるから、図は $V-x$ 線図と読み替えて推理ができる。これは前項 K_2 の

影響とは全く逆の現象傾向である。総重量が増えても回転質量体はそのままであるため、重量増加による消費位置エネルギーの増大を車輪の回転エネルギーとして吸収することができず、運動エネルギーが大きくなって速度の増加をもたらしたものと考えられる。

また、最高速度に達するのがあまり遅れると、その後の減速度は著しく大きくなることは、この場合の見逃がせない特性である。直感的には、実際の場合車輪重量は車輛重量に比べて極めて小さく、当然迂りを無視できない問題に直面することが予想される。

表2 K_2 の影響
 $\langle R=0.15(m), \alpha = \beta = 15^\circ, \theta = 4.117^\circ, K_3=1.0 \rangle$

* K_2	ℓ (m)	K_1	Vmax(m/s)
1.0	2.089	0.49	0.8149
0.8	1.671	0.45	0.6457
0.6	1.254	0.41	0.4629
0.4	0.836	0.38	0.2767

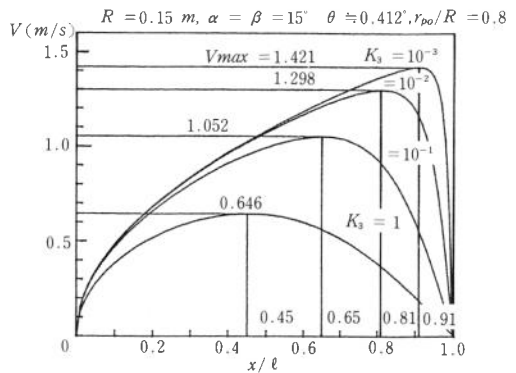


図4 付加荷重の影響

表3 K_3 の影響
 $\langle R=0.15(m), \alpha = \beta = 15^\circ, \theta = 4.117^\circ, K_2=0.8, \ell = 1.671(m) \rangle$

* K_3	Vmax(m/s)	Vmaxのときの K_1
1.0	0.646	0.45
0.1	1.052	0.65
0.01	1.298	0.81
0.001	1.421	0.91

7. あ と が き

水平レールの軌間変動率が一定の場合，完全円錐体の車輪をもつ車輛の自走機能についての理論的な挙動を追ってみたが，一般の軌道車輪も，カーブ走行時の迂りによる摩耗防止を主目的として，車輪路面が傾斜していて截頭円錐形をなしている。この路面を拡げて円錐高さを高くするならば，レールは強いて平行である必要はなく，意図的に軌間に変化をもたせることも可能かも知れない。その可能性の有無は，本推論を支えている仮定の検討と，それに伴う実験の結果を待たねばならない。その仮定とは

- | | |
|----------------|--------------|
| (1) 摩擦損失がない。 | (4) 回転体は車輪だけ |
| (2) 変形がない。 | (5) 軌間変化率は一定 |
| (3) 完全中実円錐体の車輪 | (6) 初速は0 |

があり，実際の状態から可成り外れた非工学的な内容である。また2輪1軸でもあるが，4輪2軸の車輛の場合も，同じ方法で推理が可能であり，同様の傾向が得られる。機会があれば発表するとして，これまでの推論は次のようにまとめることができる。

- * 自走速度は円錐底面半径の平方根に比例した変化をする。
- * 円錐頂角と軌間拡り角は交換しても車輪の降下率は変わらない。
- * 車輪降下率を変えない無数の円錐頂角，軌間拡り角の組合せがある。
- * 車輪降下率を小さくすると，全走行距離は長くなるが，速度と比距離の関係は無視できる程小さく，したがって最高速度もほとんど変わらない。しかし全走行距離が長くなるだけに最大速度に達するまでの走行距離はのびる。
- * 車輪をレールのどの位置におくかによって速度・比距離の関係は異ってくる。接触点が車輪の小径にすると，当然速度も小さくなるが，最高速に到達するときの比距離も小さくなる。
- * 車輪以外の回転重量が増すと最大速度に達する比距離は小さくなる。
- * 非回転重量が増すと，最大速度に達する比距離は大きくなる。
- * 1.0に近い比距離で最大距離が現れると，その後の走行では負の加速度がきわめて大きいものになる。
- * どんな場合でも，最大速度になる比距離は1/3以上1.0以下である。

前述したように，きわめて基礎的な内容であるため参考文献といったものはない。工学的，力学的な推理や実験を進める上での1資料にでもなれば幸いである。