

# 流 線 の 作 図

中 島 達 夫

## 1. ま え が き

流線は流体力学的動態を視覚的に表現し、また物体の流体抵抗などを調べるのに有効である。しかしこの流線を理論的に作図することは容易ではなく、また実験的に流線図を得ることもそう簡単ではない。

物体のまわりの流線を描く理論的方法としては、等角写像による方法、吹出し、吸込みおよび渦流の配列による方法がよく用いられるが、これらは自由形状の物体には適用し難く、対象が限定される。また最近では有限要素法によるコンピュータの手法が有効に使用されるが、これは相当複雑な手続きと比較的大型のコンピュータを必要とする。

本論では任意形状の物体の周辺の流線を小型コンピュータを用いて作図することを目的とするが、理論性より視覚性、単純性に重点を置き、比較的簡単なアルゴリズムによりどの程度実際的な流線図を描き得るか試行してみたものである。対象を2次元物体および理想流体に限定する。

## 2. 作図のアルゴリズム

領域内に直角座標  $O-x, y$  をとり、 $x$  軸を水平右方向、 $y$  軸を下方へとる。流体中に物体が存在しないときは流体は一定速度で  $x$  軸方向へ流れるものとする。領域内に物体が存在するとき、流線はその物体壁面の影響を受け、その速度ベクトルが変化し、運動方向が決定される。

したがって流線作図の問題点は任意の流体粒子が物体壁面から受ける付加速度ベクトルを求めることである。本論では物体の境界線全体を細分し、その細分線素が流体粒子に与える付加速度ベクトルを求め、これを全境界線にわたって積分する。流体粒子はその速度ベクトルの方向に一定距離移動し、以下同様にして一本の流線が描かれ、さらに同様にしてその他の流線が描かれる。

### 2.1 境界線素の影響

図1において、物体の境界線の線素  $P_1P_2$  が流体粒子  $P$  に与える影響を次のように定める。

$l_1, l_2 = PP_1, PP_2$  の長さ

$\theta_1, \theta_2 = PP_1, PP_2$  が  $y$  軸となす角

$$\theta = (\theta_1 + \theta_2) / 2, \quad l = (l_1 + l_2) / 2$$

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

$\Delta v$  = 線素  $P_1P_2$  が粒子  $P$  に与える付加速度ベクトル

$\Delta v$  の方向は  $y$  軸に対し  $\theta + \pi/2$  とし, その大きさは次式で与えられるものとする。

$$\Delta v = q\Delta\theta / l \tag{1}$$

ただし係数  $q$  は定数とする。

$\Delta v$  の  $x, y$  方向の成分を  $\Delta v_x, \Delta v_y$  とし,  $P_1, P_2$  の座標を  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  とすると,

$$\begin{aligned} \Delta v_x &= \Delta v \cos\theta = q \cos\theta \Delta\theta / l \\ &= q\Delta(\sin\theta) / l = q(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) / l \\ &= 2q \left( \frac{x_2 - x_1}{l_2} - \frac{x_1 - x_1}{l_1} \right) / (l_1 + l_2) \end{aligned} \tag{2. 1}$$

$$\begin{aligned} \Delta v_y &= \Delta v \sin\theta = q \sin\theta \Delta\theta / l = -q\Delta(\cos\theta) / l \\ &= 2q \left( \frac{y_1 - y_1}{l_1} - \frac{y_2 - y_1}{l_2} \right) / (l_1 + l_2) \end{aligned} \tag{2. 2}$$

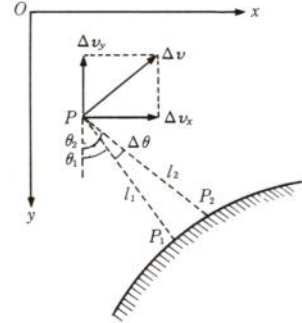


図1 境壁の影響

### 2.2 直線境界線の影響

図2において,  $x$  軸に平行な直線壁面  $P_1P_2$  が流体粒子  $P$  に与える影響は,

$\theta_1, \theta_2 = \angle PP_1, \angle PP_2$  の  $y$  軸となす角

$h = P$  と  $P_1P_2$  の垂直距離

$\theta, l = P_1P_2$  上の任意の点と  $P$  点のなす角および距離

$\Delta v_x, \Delta v_y = P_1P_2$  の  $P$  点に与える付加速度ベクトル  $\Delta v$  の  $x, y$  成分とすると, (2)式より

$$\begin{aligned} \Delta v_x &= q \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos\theta}{l} d\theta = \frac{q}{h} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos^2\theta d\theta \\ &= \frac{q}{4h} (2\theta_2 - 2\theta_1 + \sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \end{aligned} \tag{3. 1}$$

$$\begin{aligned} \Delta v_y &= q \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin\theta}{l} d\theta = \frac{q}{2h} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin 2\theta d\theta \\ &= \frac{q}{4h} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \end{aligned}$$

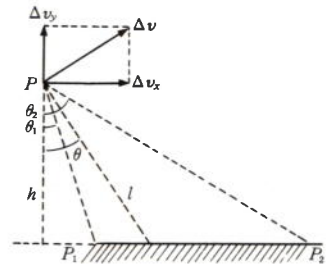


図2 直線境壁の影響

$$\tag{3. 2}$$

本論では自由形状物体を対象としているので, 物体の直線部も自由曲線と見なす。しかし例題 4, 5, 6 のような水平地平線に対しては上記の(3)式を適用する。この線は一方向に無限長を持

つからである。また例題 1, 2, 3 のように中央の流線は水平となるが、この水平流線は水平地平線と同じ取扱いをし、他の流線に対し影響をもつものとする。物体の境界線は一種の流線であり、逆に流線は物体境界線と見なして取り扱うことが出来るからである。そしてこの水平線の影響は(3)式を適用して求める。これらの場合、半無限直線であるので左側のものは $\theta = -\pi/2$ 、右側のものは $\theta = \pi/2$ となる。

### 2.3 壁画の無効部分

壁面境界線は(1)式を積分(総和)することにより流体粒子  $P$  への影響を求めることが出来るが、境界線のうち  $P$  点からの視線に入らない部分は  $P$  点に影響を与えないものとする。したがって  $P$  点からの視線に入る部分の線素のみの影響の総和を求めることになる。

例えば図 3 の例において流体粒子  $P$  点から視線に入らない境界線部分および水平線部分すなわち  $E \sim B$ ,  $B \sim F$ ,  $G \sim C$  および  $C \sim H$  は  $P$  点に対しなんら影響を与えず、それ以外の部分の影響の総和を求めればよい。この見えない部分を判定するアルゴリズムは次節で述べる。

### 2.4 作図の手順

図 3 を例にとって示す。

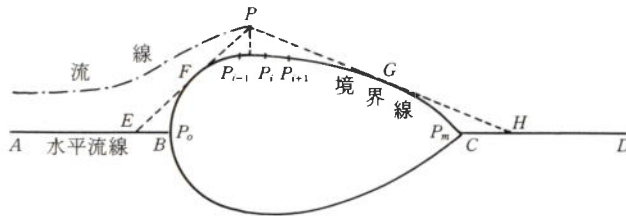


図 3 作図手順

まず準備作業として、水平線（地平線）を除いた物体の境界線の左端  $B$  と右端  $C$  の間の境界線を適当に細分し、その細分点を  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_m$  とする。 $P_0 = B, P_m = C$  である。

いま一本の流線が  $P$  点まで得られたものとする。 $P$  点からおろした鉛直線が境界線の  $P_{i-1}$  と  $P_i$  の間を通るものとする。

(1) :  $P_i \sim P_{i+1}, P_{i+1} \sim P_{i+2}, \dots$  の各線素の  $P$  点に対する付加速度ベクトル  $\Delta v_x, \Delta v_y$  を(2)式を用いて順次  $P_m$  ( $C$  点) まで求める。ただし  $P$  点からの視線に入らない部分は除く。見える部分の視線の傾斜は順次上方へ向いて行くことからその判定は一般に容易である。

(2) :  $C$  より右側の半無限水平線で視線に入る部分があれば、(3)式でその影響を計算して加算する。

(3) :  $P$  点の右側がすんだら次に左側の影響を調べる。まず  $P_i \sim P_{i-1}, P_{i-1} \sim P_{i-2}, \dots$  の各線素の  $P$  点への影響を、 $P_0$  ( $B$  点) まで(2)式を用いて前と同様に求める。

(4) :  $B$  までの左側水平線の見える範囲についてその影響を(3)式で計算して加算する。

(5) : 以上の計算で得られた速度ベクトルの累積を  $v_x, v_y$  とする。すなわち  $v_x = \Sigma \Delta v_x, v_y =$

$\Sigma \Delta v_y$ 。そこで流線を  $v_y/v_x$  の方向に一定微小長さ  $\Delta s$  だけ伸ばす。

以上のステップを繰り返して一本の流線が描かれる。そして更に一定間隔をおいて領域の左端からその上の次の流線を描いて行く。

### 3. 作 図 例

上記のアルゴリズムによるプログラムを用い、数例について描かせた結果を図4～9に示す。

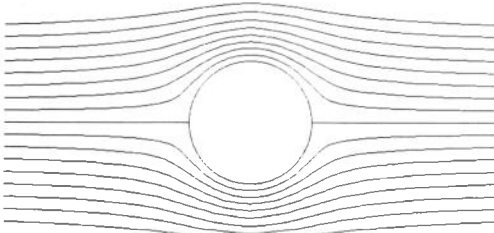


図4 作図例1

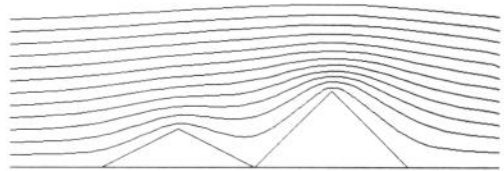


図7 作図例4

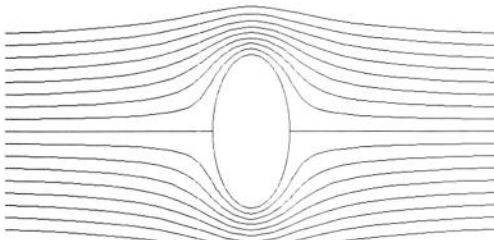


図5 作図例2

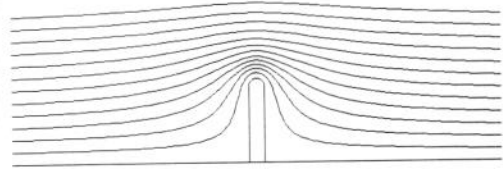


図8 作図例5

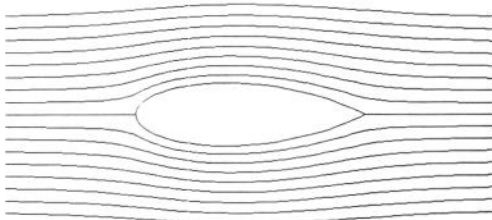


図6 作図例3

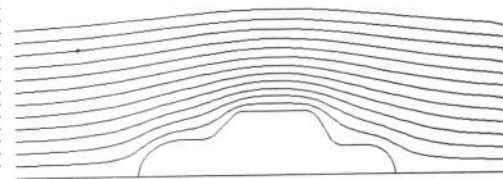


図9 作図例6

### 4. 考 察

前記のように流線の作図を試みたが、理論的にもまた手法的にも不完全な点が多く、単なる試行の域を出ていない。さらに検討を要する点が多いが、主なものとしては次の諸点があげられる。

(1) 本論における流線の作図法は(2)式を基本として組み立てられている。これは物体の境界線においてある流れが発生することを仮定している。その流れは流体力学でよく用いられる吹出し、吸込みよりもサーキュレーションに類似するものである。しかしその理論的妥当性の解明が本論

で充分行われたとはいいがたく、問題を残している。

- (2) ここで取り上げた例題は地平線または水平線をもつ場合に限られた。それ以外の場合については本論では触れなかった別のテクニックが必要となる。それについてはなお検討を要する点もあり、今回は触れない。
- (3) 流体本来の流速についての本論の取扱い方につき更に検討を要するものと考えられる。