

サスペンション最適化の一考察

宮部 道夫・阿知波重春

1. はじめに

サスペンションを線形化し最適化する方法の一つに、線形2乗(LQ)問題として最適レギュレータに依る場合がある。この解コントローラはゲインマトリックスが定数要素で構成されるため実現し易く、広く用いられる。ここでコスト汎関数を構成する2乗積分誤差項と制御エネルギー項に課す重み行列が制御結果に及ぼす影響は、一般に直裁的ではない。

ここでは車軸に荷重入力を受けるサスペンションのばね上加速度について、その状況を調べる。

2. 制 御 系

2.1 記号

A: システム行列	m: ばね上分担質量 [kg]
A _q : レギュレータ付きのシステム行列	q: Riccati式解行列の要素
a: エネルギー重み関数行列要素	R: コスト汎関数中のエネルギー2乗項行列
B: 制御行列	R ₁ : 重み関数比の定数
b: 2乗積分誤差重み関数行列要素	R ₂ : ◇
C: 出力行列	R ₃ : ◇
D: システムの減衰定数	S: L ⁻¹ 変換時の切替関数
f: 車軸に入る垂直外乱荷重 [N]	U ₀ : 最適フィードバック制御入力
f _q : レギュレータ装備系の固有振動数 [Hz]	u: 制御入力 [N]
f _n : 原懸架系の固有振動数 [Hz]	v: Riccati式解行列の要素
J: システムの振動数定数	w: Riccati式解行列の要素
J(u): コスト汎関数	W: コスト汎関数中の出力2乗項行列
K: システムの応答定数	x: ばね上状態ベクトル (変位, 速度)
k: レギュレータのフィードバック係数	x ₁ : ばね上変位 [m]
k ₁ : 同変位のフィードバック係数 [N/m]	x ₂ : ばね上速度 [m/s]
k ₁ : 同変位速度のフィードバック係数 [Ns/m]	y: 出力ベクトル

ζ : 原懸架系の減衰比

τ : 入力波形通過時間

κ_1 : レギュレータのばね定数倍率

ω : 原懸架系の固有円振動数 [rad/s]

κ_2 : レギュレータの減衰比倍率

ω_{dq} : レギュレータ付時の円振動数 [rad/s]

λ : 系の特性根

$\omega_{in} : \pi/\tau$

2. 2 制 御 系

車軸に上下力 f を受けるサスペンションの制御系は次のように表される。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\zeta\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} f + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u \quad (2 \cdot 1)$$

出力ベクトルをばね上加速度に取ると、

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\omega^2 & -2\zeta\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2 \cdot 2)$$

ここで次のように置く。

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\zeta\omega \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\omega^2 & -2\zeta\omega \end{pmatrix} \quad (2 \cdot 3)$$

コスト汎関数 $J(u)$ は

$$J(u) = \int_0^{\infty} (y^T W y + u^T R u) dt, \quad 0 \leq W, \quad 0 < R \quad (2 \cdot 4)$$

最適出力レギュレータ問題は P を任意の対称行列として、次のRiccati行列方程式において唯一の正定解 P を求めることに帰する。

$$A^T P + P A + C^T W C - P B R^{-1} B^T P = 0 \quad (2 \cdot 5)$$

ここで次のように置く。

$$R := a, \quad W := \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad P := \begin{pmatrix} q & v \\ v & w \end{pmatrix} \quad (2 \cdot 6)$$

この解の内に対称正定な解は下式で与えられる。

$$v = a m^2 \omega^2 \left(\sqrt{1 + \frac{b}{a m^2}} - 1 \right) = a m^2 \omega^2 (R_1 - 1) \quad (2 \cdot 7)$$

$$w = 2 a m^2 \zeta \omega \left(\sqrt{1 + \frac{b}{a m^2} + \frac{1}{2 \zeta^2}} \left(\sqrt{1 + \frac{b}{a m^2}} - 1 \right) - 1 \right) = 2 a m^2 \zeta \omega (R_2 - 1) \quad (2 \cdot 8)$$

$$q = 2 a m^2 \zeta \omega^3 \sqrt{1 + \frac{b}{a m^2}} \left(\sqrt{1 + \frac{b}{a m^2} + \frac{1}{2 \zeta^2}} \left(\sqrt{1 + \frac{b}{a m^2}} - 1 \right) - \sqrt{1 + \frac{b}{a m^2}} \right) = 2 a m^2 \zeta \omega^3 R_1 (R_2 - R_1) \quad (2 \cdot 9)$$

ここに

$$R_1 := \sqrt{1 + \frac{b}{a m^2}}, \quad R_2 := \sqrt{1 + \frac{b}{a m^2} + \frac{1}{2 \zeta^2}} \left(\sqrt{1 + \frac{b}{a m^2}} - 1 \right) \quad (2 \cdot 10)$$

これが対称正定なRiccati式の解であることを次に確かめる。

(1) Pは(2・6)より対称行列である。

$$(2) 1 < R_1 < R_2; 0 < a, b \quad (2 \cdot 11)$$

は明らかであるから

$$0 < q \quad (2 \cdot 12)$$

次にF(ζ)を次式のように定義して、ζ = 0より∞までの動きを調べる。

$$F(\zeta) := \frac{|P|}{(am^2\omega^2)^2} = \frac{q\omega - v^2}{(am^2\omega^2)^2} = 4\zeta^2 R_1(R_2 - R_1)(R_2 - 1) - (R_1 - 1)^2 \quad (2 \cdot 13)$$

ζ = 0では

$$\zeta R_2|_{\zeta=0} = \sqrt{\frac{1}{2}(R_1 - 1)}, \quad \zeta R_1|_{\zeta=0} = 0 \quad (2 \cdot 14)$$

であるから

$$F(0) = R_1^2 - 1 = \frac{b}{am^2} > 0, \quad \forall a, b > 0 \quad (2 \cdot 15)$$

ζ → ∞では

$$F(\zeta) = 4\zeta^2 R_1 \left[R_1 \left(1 + \frac{R_1 - 1}{2R_1^2} \frac{1}{2\zeta^2} - \dots - 1 \right) \left(\sqrt{R_1^2 + \frac{1}{2\zeta^2}(R_1 - 1)} - 1 \right) \right] - (R_1 - 1)^2 \quad (2 \cdot 16)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} F(\zeta) = 0 \quad (2 \cdot 17)$$

この間のF(ζ)について調べる。(2・13)より

$$\frac{F(\zeta)}{4R_1} = (\zeta R_2 - \zeta R_1)(\zeta R_2 - \zeta) - \frac{1}{4R_1}(R_1 - 1)^2 \quad (2 \cdot 18)$$

ここで、R₃(ζ)を次のように置く。(2・19)

$$R_3(\zeta) := \zeta R_2 = \sqrt{\zeta^2 R_1^2 + \frac{1}{2}(R_1 - 1)} > 0, \quad 0 < \zeta < \infty \quad (2 \cdot 20)$$

$$R_3'(\zeta) = \frac{R_1^2}{R_3(\zeta)} \zeta \quad (2 \cdot 21)$$

これ等を用いれば、

$$\frac{F'(\zeta)}{4R_1} = -\frac{(R_1 + 1)(R_1\zeta - R_3)^2}{R_3(\zeta)} < 0, \quad 0 < \zeta < \infty \quad (2 \cdot 22)$$

を導く。即ちF(ζ)は原点で正、無限遠で零、その間は単調減少の正関数であることが分かる。

(3) 従って解行列Pは、

$$0 < |P|, \quad 0 < \zeta < \infty \quad (2 \cdot 23)$$

以上よりPは対称正定である。

図2-1に(2・7),
(2・8)のv, wをb/aに
対して示す。

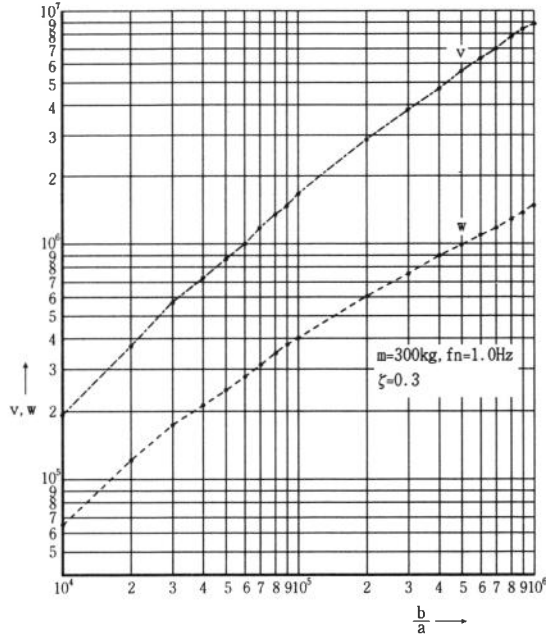


図2-1

3. 最適フィードバック

1) レギュレータのフィードバック量

最適フィードバック制御入力 U_0 は

$$U_0 = -kx = -R^{-1}B^T P x = -\left(\frac{v}{am}, \frac{w}{am}\right)x = -k_1 x_1 - k_2 x_2 \quad (3 \cdot 1)$$

$$k_1 = \frac{v}{am} = m\omega^2(R_1 - 1), \quad k_2 = \frac{w}{am} = 2\zeta m\omega(R_2 - 1) \quad (3 \cdot 2)$$

原系の各フィードバック係数に対するレギュレータのフィードバック係数の倍率 κ_1, κ_2 は,

$$\kappa_1 = \frac{k_1}{k} = R_1 - 1, \quad \kappa_2 = \frac{k_2}{c} = R_2 - 1 \quad (3 \cdot 3)$$

これと(2・8), (2・9), (2・10)より次の関係がある。

$$\omega^2 + \frac{v}{am^2} = \omega^2 R_1 = \omega^2(1 + \kappa_1), \quad 2\zeta\omega + \frac{w}{am^2} = 2\zeta\omega R_2 = 2\zeta\omega(1 + \kappa_2) \quad (3 \cdot 4)$$

2) 特性根の動き

状態方程式と特性根 λ_1, λ_2 は次のようになる。

$$\dot{x} = Ax + BU_0 = (A - BR^{-1}B^TP)x = \begin{pmatrix} -\omega^2 - \frac{0}{am^2} & -2\zeta\omega - \frac{1}{am^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := A_q x \quad (3 \cdot 5)$$

$$\lambda_{1,2} = \omega \left\{ -\zeta R_2 \pm \sqrt{(\zeta R_2)^2 - R_1} \right\} = \omega \left\{ -\zeta R_2 \pm \sqrt{R_1 - (\zeta R_2)^2} i \right\} \quad (3 \cdot 6)$$

特性根の軌跡をb/aに対して示すと図3-1のようになる。

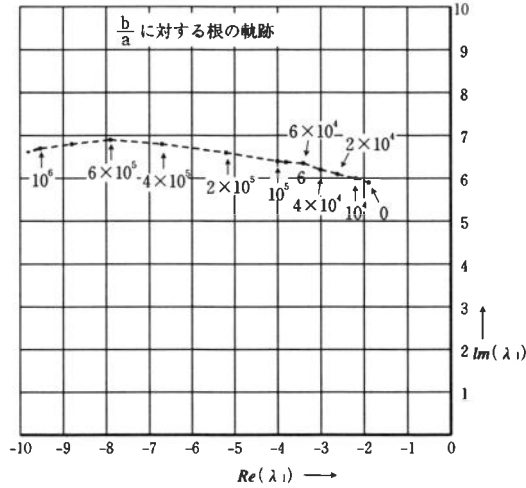


図3-1

(3・6)よりb/aと共に $Im(\lambda_1)$ は一旦上った後減少し、

$$(\zeta R_2)^2 - R_1 = 0 \Rightarrow \frac{b}{a} = \left[\left(\frac{1 + \sqrt{1 + 8\zeta^2}}{4\zeta^2} \right)^2 - 1 \right] m^2 \quad (3 \cdot 7)$$

となる点を越えると実数解になる。

3) 固有振動，減衰比の変化

レギュレータ付き系の固有振動数 f_q は原系の同じく f_n に対して(3・6)より

$$f_q = f_n \sqrt{R_1} = f_n \sqrt{1 + \kappa_1} \Leftrightarrow \omega_q = \omega_n \sqrt{R_1} = \omega_n \sqrt{1 + \kappa_1} \quad (3 \cdot 8)$$

この系のステップ応答時について、その減衰比 ζ_g と振動数 f_{dq} は下のように表される。

$$\zeta_q = \frac{-Re(\lambda_{1,2})}{\omega_q} = \frac{R_2}{\sqrt{R_1}} \zeta = \frac{1 + \kappa_2}{\sqrt{1 + \kappa_1}} \zeta = \sqrt{1 + \kappa_1 + \frac{1}{2\zeta^2} \left(1 - \frac{1}{\kappa_1}\right)} \zeta \quad (3 \cdot 9)$$

$$f_{dq} = \sqrt{1 - \zeta_q^2} f_q = \sqrt{R_1 - (\zeta R_2)^2} f_n = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \zeta^2 R_1\right) R_1 + \frac{1}{2}} f_n \quad (3 \cdot 10)$$

κ_1 に対する f_q 、 ζ_q の大域的な動きは図3-2のようであり、b/aに対する変化を図3-3に例示する。

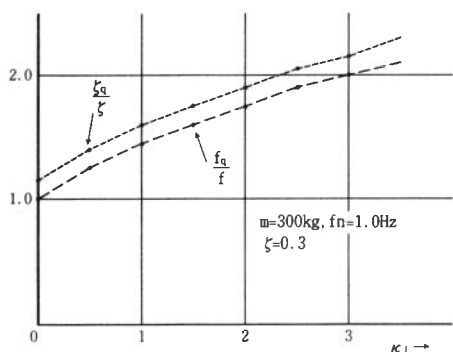


図 3-2

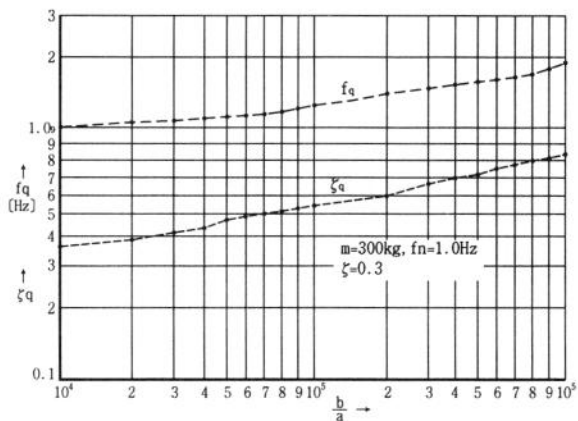


図 3-3

4) κ_1, κ_2 の動き

(3.3) より

$$(\kappa_1 + 1 + \frac{1}{4\zeta^2})^2 - (\kappa_2 + 1)^2 = \frac{1}{2\zeta^2} (1 + \frac{1}{8\zeta^2}) \quad (3.11)$$

従って κ_1 に対して κ_2 を大域的に描けば図 3-4 のようになり、 $(0, 1/(4\zeta^2))$ を通る 45° の直線に漸近する双曲線の一分支を作る。 b/a に対して κ_1, κ_2 を実際に算出すると図 3-5 のようになる。これは本質的に v, w と同様の動きである。このように b/a に対して κ_1, κ_2 共に高くなるのはコスト汎関数が時間積分の形であるため早期の収束を要求するからである。

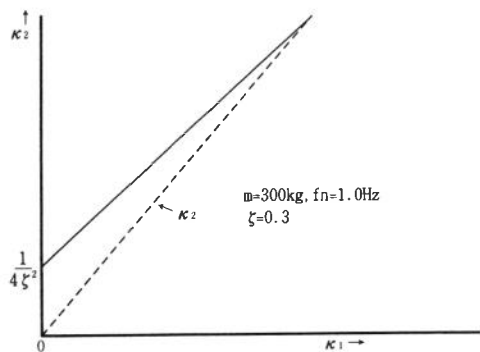


図 3-4

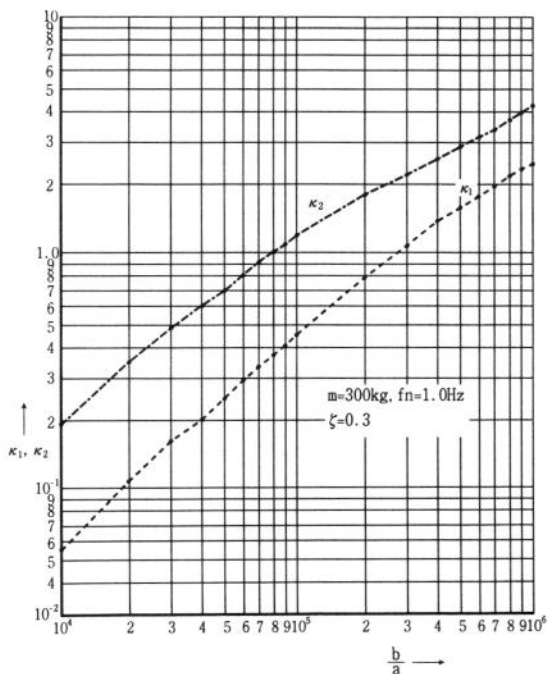


図 3-5

5) b/a固定の場合の ζ_q

原系が非減衰 ($\zeta = 0$) の場合 f_q は不変であるが, (2・14) の関係があるので ζ_g (3・9), f_{dq} (3・10) は,

$$\zeta_q = \frac{\zeta R_2 |_{\zeta=0}}{\sqrt{R_1}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{R_1}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{1+\kappa_1}\right)} \quad (3 \cdot 12)$$

$$f_{dq} = \sqrt{R_1 - (\zeta R_2 |_{\zeta=0})^2} f_n = \sqrt{\frac{1}{2} (1 + R_1)} f_n = \sqrt{\frac{\kappa_1}{2}} f_n \quad (3 \cdot 13)$$

となる。

b/aに対する ζ_g の変化を図3-6に示す。

b/a $\rightarrow\infty$ で $\zeta_g \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$ になる。

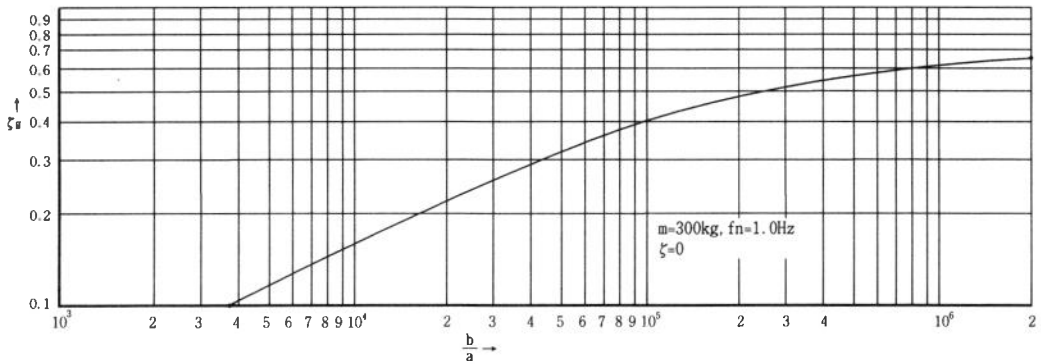


図3-6

次に原系の減衰比 ζ の各値に対してb/a固定比レギュレータを適用した場合を調べる。

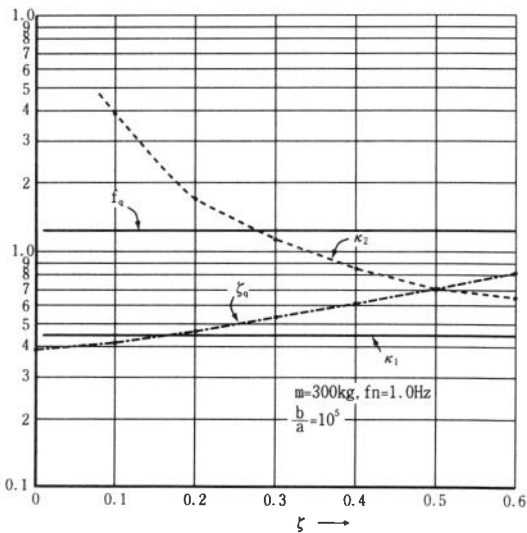


図3-7

(3・3), (3・8) より κ_1 , f_q は不変であるが, κ_2 , ζ_q は各々(3・3), (3・9) に見るように原系の減衰比 ζ の影響をうける。この様子を図3-7に示す。

即ち或る系にレギュレータのb/aを指定して適用すると, ダンパフィードバック係数倍率 κ_2 , 減衰比 ζ_q は原系の ζ に対して相対的に決まる。 ζ_q の増加に対して κ_2 の減少が大きいのは(3・3), (3・9)より

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{\kappa_2}{\zeta_q} = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{R_1}{\zeta}} \left(1 - \frac{1}{R_2}\right) = 0 \quad (3 \cdot 14)$$

の事情に依る。

4. 応 答

(3・5) の系に対して車軸に掛る外力を図4-1のような正弦波の上半分を考える。通常乗心地で問題となる波形の一つだからである。

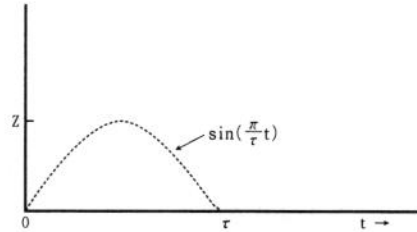


図4-1

(3・5) のLaplace変換は、

$$\begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} = \frac{z\pi/\tau}{m} \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2 + (2\zeta\omega + \frac{w}{am^2})s + \omega^2 + \frac{v}{am^2}} \cdot \frac{1}{s^2 + (\pi/\tau)^2} (1 + e^{-\tau s}) \\ \frac{1}{s^2 + (2\zeta\omega + \frac{w}{am^2})s + \omega^2 + \frac{v}{am^2}} \cdot \frac{s}{s + (\pi/\tau)^2} (1 + e^{-\tau s}) \end{pmatrix} \quad (4 \cdot 1)$$

ばね上加速度 $\dot{x}_2(t)$ は上式の解 $x(t)$ を (3・5) に入れて求めるか、又は初期値を零として上式より $sx_2(s)$ を出して求まる。即ち

$$D := \zeta\omega + \frac{w}{2am^2} = \zeta\omega R_2 = \sqrt{R_1}\omega\zeta_q, \quad J := \sqrt{-(\zeta\omega + \frac{w}{2am^2})^2 + \omega^2 + \frac{v}{2am^2}} = \sqrt{-(\zeta\omega R_2)^2 + \omega^2 R_1} = \omega_{dq}$$

$$K := \frac{\omega^2 + \frac{v}{am^2} - (\frac{\pi}{\tau})^2}{2\zeta\omega + \frac{w}{am^2}} = \frac{\omega^2 R_1 - (\frac{\pi}{\tau})^2}{2\zeta\omega R_2} = \frac{\omega_{dq}^2 - \omega_{in}^2}{2\omega\zeta_q\sqrt{R_1}} \quad (4 \cdot 2)$$

と置いて、下式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) = & \frac{z\pi/\tau}{2Dm} \left[\frac{(\pi/\tau)^2}{K^2 + (\pi/\tau)^2} \left\{ \cos(\frac{\pi}{\tau}t) + S \cos(\frac{\pi}{\tau}(t-\tau)) \right\} \right. \\ & - \frac{\pi/\tau \cdot K}{K^2 + (\pi/\tau)^2} \left\{ \sin(\frac{\pi}{\tau}t) + S \sin(\frac{\pi}{\tau}(t-\tau)) \right\} \\ & - \frac{(\pi/\tau)}{K^2 + (\pi/\tau)^2} \left\{ e^{-Dt} \cos Jt + S e^{-D(t-\tau)} \cos(J(t-\tau)) \right\} \\ & \left. + \frac{1}{J} \left\{ D + K + \frac{(D-K)K^2}{K^2 + (\pi/\tau)^2} \right\} \left\{ e^{-Dt} \sin Jt + S e^{-D(t-\tau)} \sin(J(t-\tau)) \right\} \right] \quad (4 \cdot 3) \end{aligned}$$

ここにSは次の関数とする。

$$S = \begin{cases} 0 & ; \quad t - \tau \leq 0 \\ 1 & ; \quad 0 < t - \tau \end{cases} \quad (4 \cdot 4)$$

従って加速度振幅が小さくなるには (4・3) よりDと共に $K^2 + (\pi/\tau)^2$ が大きいこと、即ち固有円振動数 ω_q と入力円振動数 π/τ の差が大きい場合 ((4・2)) 加速度が小さくなるのは自明

として、 b/a の大きいことが効果的であることを示す。

また減衰を早くするためには D が大きいこと、即ち原系の固有振動数 ω と減衰比 ζ と共に R_2 つまり b/a が大きいことが効果的であることを示す。

以下の図において(4・3)の応答波形を例示する。図の各場合を表4-1に示す。

表4-1

図	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6	4-7
b/a	10^5			0	10^4	10^6
f_{in}	0.5	1.0	3.0	2.0		

条件= $m=300\text{kg}$, $f_n=1.0\text{Hz}$, 入力波形 正弦半波 (図4-1)

入力荷重振幅 $Z=29.42\text{N}$, 原系減衰比 $\zeta=0.3$

$$f_{in} = \frac{1}{2\tau} \frac{1}{s}$$

1) 波形通過時間の影響

入力正弦半波の通過時間を変えた場合のばね上加速度波形(4・3)を、 $b/a=10^5$ に固定して図4-2~4-4を示す。

各場合に対して最適レギュレータを付けない場合を対比しており、これと比較すると何れも可成りの振動抑制が効いていることが判る。

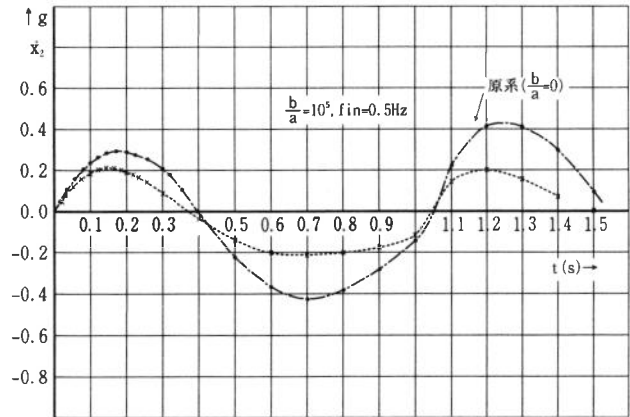


図4-2

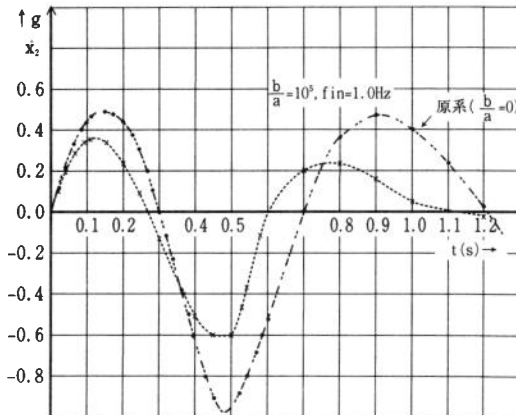


図4-3

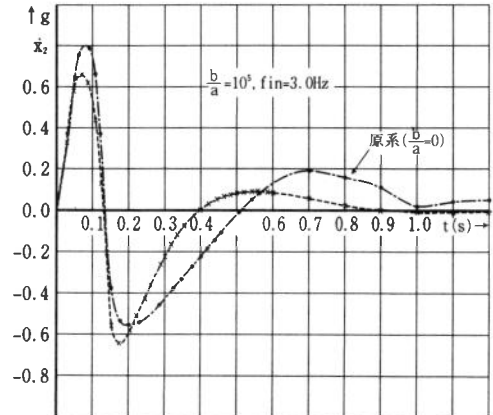


図4-4

2) b/a の影響

入力振動数 f_{in} を2.0Hzに固定して b/a を変えた場合を図4-5~4-7に例示する。

2乗積分誤差の重みを増すに従い波形の振幅が小さく、収束が速くなってゆく様子が見られる。これは勿論コスト汎関数中のエネルギー項の比重を相対的に軽く見積もって図3-5に見るようにレギュレータのフィードバックの係数倍率を大きく上あげることにより達成しているものである。

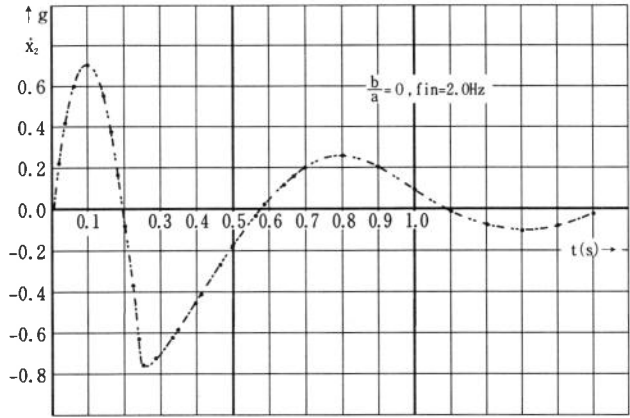


図4-5

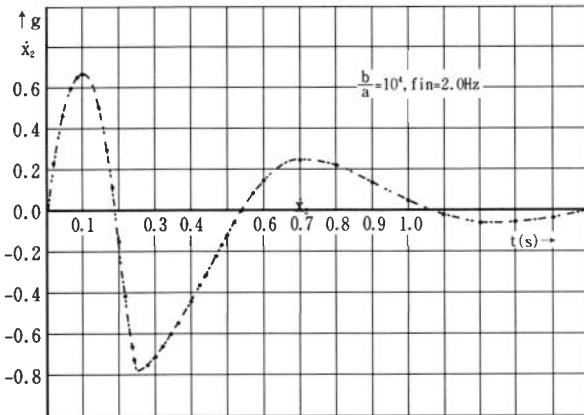


図4-6

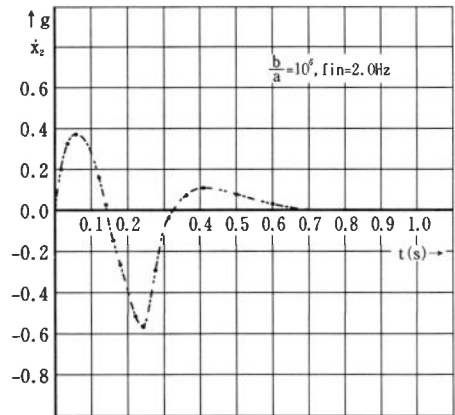


図4-7

5. 結 び

サスペンションの振動特性を最適レギュレータにより改良する場合に、車軸荷重入力、ばね上加速度出力の系について、出力2乗積分項とエネルギー項に課する重み行列を中心に検討を行った。

この2次系に対してRiccati式の解析解を求め、これよりエネルギー項への重みに対して出力項への重みを大きくすると、レギュレータのフィードバック量が增大する一方、出力振動が抑制される。固有振動数、減衰比など振動特性は、両重み行列要素の比、原系の減衰比によって決まる。

特性根の位置は、この比を上げるにつれて複素面上を左に移動し、固有振動数、減衰比とも増加するが、或る値を経過すると虚数軸成分は下がり始める。極端に上げると理論上減衰が効いて非振動的になる。

サスペンションの設計要件としてはストロークを大きく、減衰比を適値に取るが、非定常応答に対しこの手法による改良を行う場合、重み比の持つこのような特性を把握しておくことが有用であると考えられる。体感、長時間走行時の疲労に対し、振動項の2乗の時間積分の持つ有効性の範囲は別に究めねばならない問題である。

参 考 文 献

- 1) 岡本, 薫, 花野, 人体一車体連成系の最適レギュレータによる振動制御, 機論No.93-1401, 60 (573), 1994-5
- 2) 松下, 則次, 和田, アクティブサスペンションの最適制御, 機論No.89-1156F, 56 (526), 1990-6
- 3) 岩田, 松浦, 減衰パラメータのオンライン制御によるセミアクティブサスペンションの研究, 機論No.87-1479B, 54 (507), 1988-11
- 4) 小郷, 美多, システム制御理論入門, 実教出版, 1979
- 5) Afanas'ev, Kolmanoskii, Nosov, *Mathematical Theory of Control Systems Design*, Kluwer Academic Publishers, 1989