

ピストンを想定した円筒型モデルによる熱伝導および 熱膨張に関する有限要素法解析

加藤泰世

1. 緒 言

有限要素法は構造解析をはじめ流体解析、電磁場解析、振動解析さらに熱伝導解析など工学の種々の分野において現在では幅広く活用されている^{1) - 12)}。

有限要素法と同様の解析を行う他の方法として、たとえば構造解析においては応力関数を利用する手法もしばしば記されている^{13) - 20)}。特に、切欠き底やその周辺で生ずる応力集中のように良く知られている典型的な一部の問題については、条件に相応しい応力関数が提唱されているが、複雑な形状の物体に様々な拘束条件や荷重条件を与えた問題を扱うことは難しく、応力関数が適用できるケースは極限られている。また、流体解析においては、管路内の流れ解析や、翼のような物体の回りの流れについて、その条件に相応しい複素ポテンシャルが導かれているが^{21) - 24)}、管路の形状あるいは流れの中の物体の形状が複雑な場合、また流速や圧力の条件の扱いが単純ではない場合も少なくない。

有限要素法は、こうした形状や解析条件が複雑な場合においても精度的には充分妥当な数値解析を行うことが可能である。また、ここで示す解析は熱伝導と熱膨張の両者を考慮した内容であるが、こうしたいくつかの内容を合わせた連成解析を行うことも有限要素法の有用性であるといえる。

さて、本論文で解析を試みるのは、原動機のピストンを想定した円筒状の物体に、燃焼室側とクランクシャフト側で予測される温度条件を与え、熱伝導による温度分布とそれに伴うピストンの変形解析である。原動機のピストンが燃焼室からの熱伝導によって変形することは一般に知られているが²⁵⁾、有限要素法による解析によってこうした傾向を確認するとともに、解析された数値解について検討を行うことがここでの目的である。ところで、ピストンに関する有限要素法解析は、ピストン頭部にかかる燃焼ガスの圧力も考慮した熱応力解析や疲労解析、他にもピストンリングとシリンダーライナーの摺動部での接触解析など種々の内容で行われている^{26) - 29)}。こうした成果の一方で、本論文で取り上げる熱伝導に伴うピストンの変形については、原動機開発の歴史を遡れば有限要素法が用いられる以前から経験的に知られていたであろうが、数値解析によって現象を確かめることに充分な意義はあると思われる。また、上述のような解析を、単純な円筒状のモデルで行うことも本論文の目的の一つとしている。以下、得られた結果について報告

する。

2. 有限要素法ソフトを用いた解析手法

有限要素法による解析の手法は、表1に示すように、1) 前処理、2) 計算、3) 後処理の三つに分けられる。1) の前処理は、まず解析対象とするモデルを作成し、要素分割をして材料定数や境界条件を入力する。その後2) の計算を行い、3) の後処理は結果を確認するとともに、結果の妥当性を検討することであり、修正の必要があると考えられる場合は1) の前処理のモデル作成や解析条件の入力をやり直し、妥当と思われる結果が得られるまで一連の手法を繰り返すことになる。

表1 有限要素法の解析手順

1) 前処理	<ul style="list-style-type: none"> ・モデルの作成 ・要素分割 ・材料定数や境界条件の入力
2) 計算	<ul style="list-style-type: none"> ・計算の実施
3) 後処理	<ul style="list-style-type: none"> ・解析結果の確認 ・結果の妥当性の検討

本研究で解析に用いたソフトウェアは算生会がウェブ上にシェアウェアとして公開しているものである。行った解析は、熱伝導による温度分布と熱膨張による変形の解析であり、ともに二次元解析と三次元解析を行った。算生会は、構造解析や流体解析など解析の分野別にいくつかのソフトを開発しているが、ここで用いたソフトの名称は下記の表2に示す通りである。

表2 解析に使用したソフトの一覧

	モデルの作成	要素分割	熱伝導解析	構造解析	熱応力解析
2次元解析（2D）	SectData		Therm 2 D	FEM 2 D	HeatSt 2 D
3次元解析（3D）	SolidData		Therm 3 D	FEM 3 D	HeatSt 3 D

二次元解析の場合も三次元解析の場合も、先に熱伝導解析を行って温度分布を求め、そこで得られた温度分布を境界条件として熱伝導による変形解析を行った。ただし、熱応力解析ソフトは熱膨張に伴う変形解析に利用した。また、熱伝導解析と変形解析は、ともに表1に示した1) から3) の手順を行うことになる。

表3は、熱伝導解析を行う場合と熱伝導による変形解析を行う場合のそれぞれの手順と、使用するソフト名を記している。すなわち、これらのどちらの解析を行う場合においても前処理として解析の対象となるモデルを作成し、要素分割を行う。熱伝導解析の場合は、材料定数として、比熱、熱伝導率、密度を入力し、境界条件として固定温度や熱伝達に関する項目を入力する。そして、計算を行って得られた各部の温度分布を確認する。また、熱伝導による変形解析を行うには、解析の対象となるモデルの作成と要素分割をした後の続きは、主に熱応力解析ソフトを使用することになるが、入力条件の中で弾性係数とポアソン比ならびに変位を固定する拘束条件は構

造解析のソフトを用いて入力する。そして、線膨張係数と温度条件の入力、および計算と後処理は熱応力解析ソフトを利用する。なお、先に述べたように温度条件は熱伝導解析で得られた温度分布を用いている。

表3 使用したソフトと解析の手順

熱伝導解析			熱伝導による変形解析		
手順	内容	使用したソフト	手順	内容	使用したソフト
前処理	モデル作成、要素分割	SectData(2D用) SolidData(3D用) Therm2D(2D用) Therm3D(3D用)	前処理	モデル作成、要素分割	SectData(2D用) SolidData(3D用)
	材料定数の入力 (密度、比熱、熱伝導率)			材料定数の入力 その1 (継弾性係数、ポアソン比)	FEM2D(2D用) FEM3D(3D用)
	境界条件の入力 (温度条件)			境界条件の入力 その1 (拘束条件)	
計算	計算の実行		計算	材料定数の入力 その2 (線膨張係数)	HeatSt2D(2D用) HeatSt3D(3D用)
後処理	温度分布図を確認			境界条件の入力 その2 (温度条件、熱伝導解析で得られた温度分布)	
				計算の実行	
			後処理	変形図を確認	

3. 基本的な問題について解析結果と数式計算の結果の比較

円筒型モデルによるピストンの解析に先立ち、基本的な問題を取り上げ、先に示した算生会ソフトを用いて、有限要素法で得られた結果と理論的に導いた数式による解析結果との比較検討を行った。

具体的な問題として、図1に示すように断面形状が一様な棒材の一端を壁に固定し、その棒材の壁側の端面と反対側の端面にそれぞれ温度を一定とする条件を与え、棒全体の温度分布と熱膨張による棒の各部の変位を求めるところにする。なお、初期温度は0°Cとする。棒材の形状寸法は図1に示すとおりであり、材質は鋼材とした。壁側の端面の温度を500°Cとして与え、反対側の端面は初期温度と同じ0°Cとした。なお、棒の材料特性は表4に示すとおりであり、温度分布と熱膨張による変形は、図1に示すように壁側からの距離xを変数として導くこととする。

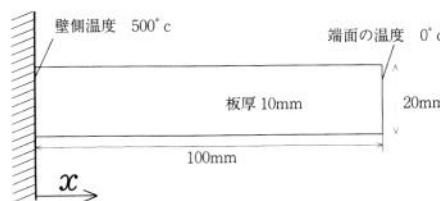


図1 両端面の温度を固定した棒材

表4 棒材の材料特性

密度	7830kg/m ³
比熱	473J/kg・K
熱伝導率	48.1W/m・K
継弾性係数	210000MPa
ボアン比	0.3
線膨張係数	0.000011/°C

A. 理論的な数式計算による解析方法

熱伝導に関する問題はフーリエの法則³⁰⁾が種々の場合に對して適用できるが、ここで取り上げた棒材の両方の端面の温度条件が与えられている場合には、壁側の端面に与えた温度 t_1 、反対側の端面に与えた温度 t_2 、それに棒の長さ ℓ を用いて基準点からの各断面での温度 t を下記の式で求めることができる³¹⁾。

$$t=t_1 + \frac{x}{\ell}(t_2 - t_1) \quad (1)$$

また、熱膨張による棒の各部の変位を導くにあたり、まず材料の線膨張係数 α と変化させた温度の値を乗ずればひずみ ε を求めることができる。すなわち、温度を t_a から t_b へ変化させた場合は次式となる。

$$\varepsilon = \alpha \times (t_b - t_a) \quad (2)$$

また、ここで求める水平方向の変位 u とひずみ ε_x の関係は x を用いた下記のような関係式で表される^{31) - 34)}。

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (3)$$

熱膨張については初期温度を0°Cとしているので、式(2)の $(t_b - t_a)$ に式(1)を用いて、また式(2)の ε を式(3) ε_x に代入して x で積分すれば次式が得られるので、この式を用いて棒の各部の変位を算出することができる。

$$u = \alpha t_1 x + \alpha \frac{t_2 - t_1}{2\ell} x^2 \quad (4)$$

B. 有限要素法による解析方法

この問題は、断面の形状寸法が一様であるので二次元解析とする。先に示した手順に基づき解析を行う。

まず、熱伝導解析を行うにあたり、ソフトウェアSectDataで図2に示すように解析対象となる棒材のモデルを作成するとともに要素分割を行う。同図に示すように頂点と各辺の中点に節点を設ける8節点四角形要素とした。図中の各要素のほぼ中央に太字で記す番号は要素番号であり、節点番号は小さな文字で示してある。また丸印で囲んだ節点は温度の固定条件を与えていること

を意味している。

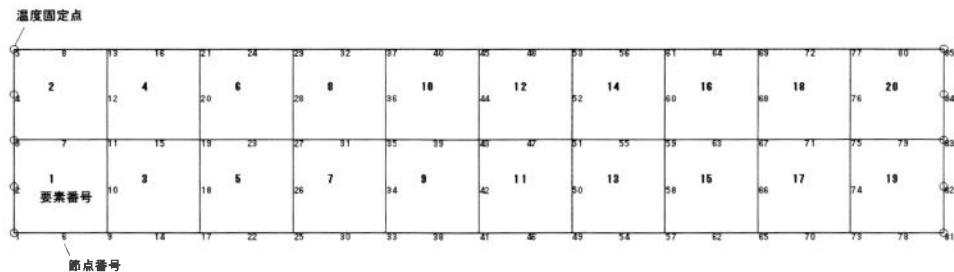


図2 要素分割および温度条件を設定した棒材のモデル

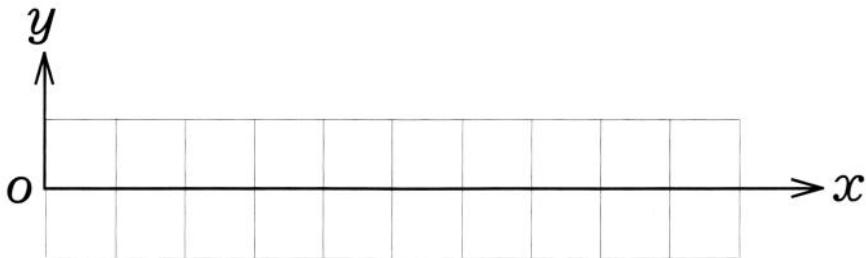


図3 解析モデルの座標系

また、節点座標は図3に示すように棒材の左端の中央を原点Oとして、水平方向、垂直方向をそれぞれ x と y を用いて表わすことにする。

次に、熱伝導解析ソフトTherm 2Dで密度、比熱、熱伝導率を入力するとともに壁側の端面とその反対側にそれぞれの温度条件を与える。以上が熱伝導解析の前処理であり、計算を実行して解析された温度分布を確認する。

それから、熱伝導による変形解析についても図2に示す熱伝導解析と同様のモデルを使用し、表3の説明で述べたように縦弾性係数とポアソン比は構造解析ソフトFEM 2Dを用いて入力する。また、解析対象の棒材は壁側を固定するので、そのための拘束条件も同じソフトを用いて入力する。熱伝導による変形解析を行うのは熱応力解析ソフトHeat 2Dであり、材料特性の線膨張係数を入力し、先の熱伝導解析で得られた各部の温度分布の結果を解析のための温度条件として入力する。以上が熱伝導による変形解析の前処理であり、計算を実行して解析された変位図を確認する。

C. 理論的な数式計算による解析結果と有限要素法による解析結果の比較

表5に示すのは、有限要素法と計算式によって解析された数値結果であり、棒材モデルの各節点での温度、および変位の結果を示している。ここで示した結果は、 y 座標が0 mmとなる節点に対するものであり、節点番号と座標の値を解析された数値結果に併記した。また、数値計算の

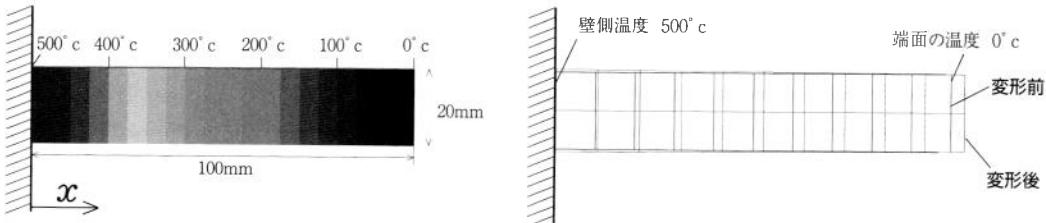
表5 热伝導解析による棒材の各節点での温度および変形解析による各節点の変位

節点番号	x座標, mm	y座標, mm	温度, °c		x方向の変位, mm	
			有限要素法	数式計算	有限要素法	数式計算
3	0	0	500	500	0.000000	0.000000
7	5	0	475	475	0.026385	0.026813
11	10	0	450	450	0.051588	0.052250
15	15	0	425	425	0.075448	0.076313
19	20	0	400	400	0.098074	0.099000
23	25	0	375	375	0.119390	0.120313
27	30	0	350	350	0.139332	0.140250
31	35	0	325	325	0.157895	0.158813
35	40	0	300	300	0.175083	0.176000
39	45	0	275	275	0.190896	0.191813
43	50	0	250	250	0.205333	0.206250
47	55	0	225	225	0.218396	0.219313
51	60	0	200	200	0.230083	0.231000
55	65	0	175	175	0.240396	0.241313
59	70	0	150	150	0.249333	0.250250
63	75	0	125	125	0.256896	0.257813
67	80	0	100	100	0.263083	0.264000
71	85	0	75	75	0.267896	0.268813
75	90	0	50	50	0.271333	0.272250
79	95	0	25	25	0.273396	0.274313
83	100	0	0	0	0.274083	0.275000

場合は、温度の算出に対しては式(1)を、また変位の算出に対しては式(4)を用いた。

まず、熱伝導解析による温度分布であるが、解析した温度分布の等高線図を図4a)に、またx座標と解析された温度のグラフを図5にそれぞれ示す。表5にて有限要素法と数式計算による結果は全ての節点で一致しており、また図5では両者による解析結果は一本の線に重なっている。

次に、熱伝導による変形解析であるが、x座標と解析された温度の関係を図6に、棒材モデルの変形図を図4b)にそれぞれ示す。先に示した温度分布の結果のように数値が全く等しいわけではないが、有限要素法に解析と数式による計算結果は全ての節点でほぼ一致しており、これらの関係を示したグラフでは両者はほぼ重なっている。



a) 温度分布の等高線

b) 変形図

図4 解析された温度分布および変形図

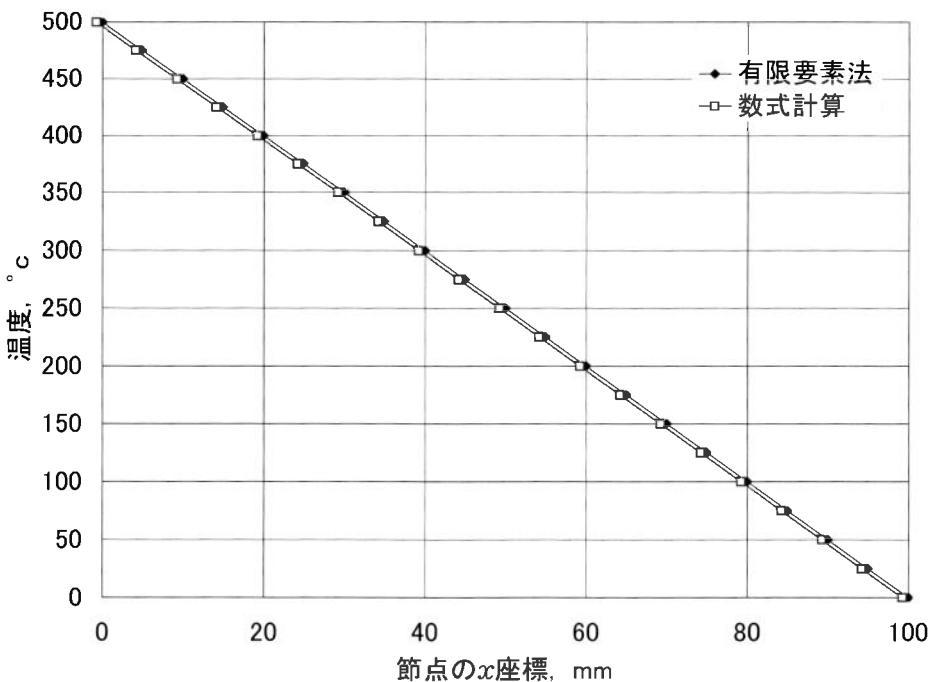


図5 棒材に生じた温度分布の解析結果

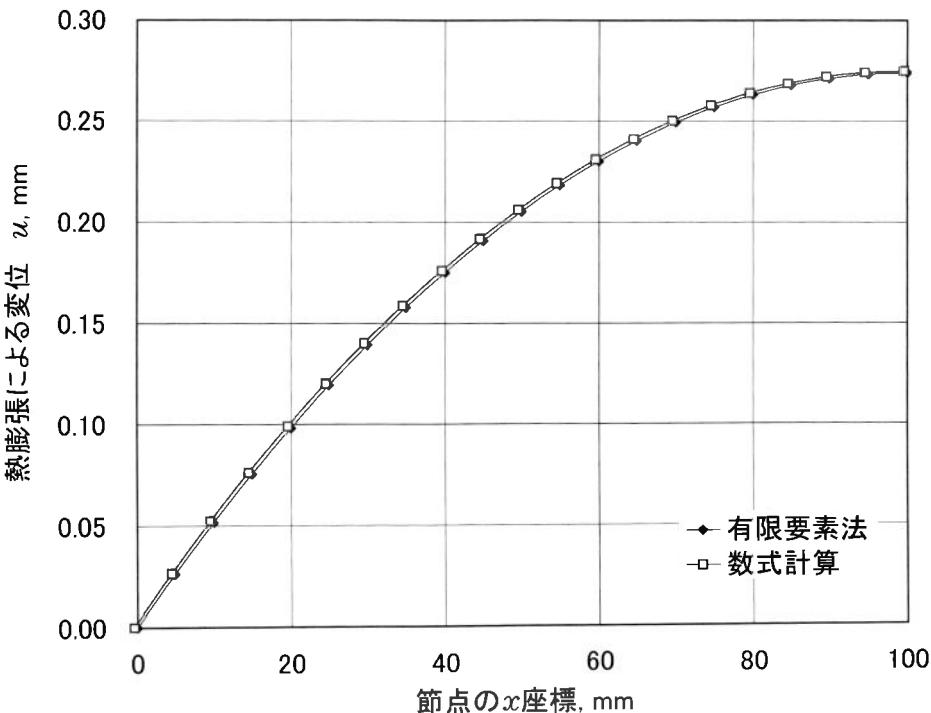


図6 棒材モデルの変位解析結果

4. 円筒型モデルによるピストンを想定した有限要素法解析

ピストン形状は円筒状とみなすことができるので、二次元解析は軸対称問題として扱うことにする。軸対称問題とは、図7のようにグレー色の断面部を回転軸の周りに1回転させてできるような形状を扱う問題であり、図7の場合にはグレー色の断面部分のモデルを作成し、解析ソフトにて軸対称問題を指定する。

また、ここで解析を行うピストンの材質はアルミニウム、またシリンダーライナーの材質は鋳鉄を仮定し、材料特性値は下記の表6に記す値を用いることとする。また、ピストンリングについては鉄系材料とし、鋳鉄と値がほぼ同じであると仮定して解析を行った。

表6 解析対象モデルに用いた材料特性値

材料	アルミニウム	鋳鉄
密度	2750kg/m ³	7830kg/m ³
比熱	963J/kg・K	473J/kg・K
熱伝導率	120W/m・K	48.1W/m・K
綫弾性係数	72000MPa	210000MPa
ポアソン比	0.3	0.3
線膨張係数	0.000022/°C	0.000011/°C

4.1 ピストン単体での二次元解析

実際に、軸対称問題として解析対象のモデルを作成するにあたり、ピストン形状を想定するとクランクとの連接棒をつなぐためのボス部を考慮するかしないかで断面形状が異なるので、図8に示すような3タイプのモデルを作成し、解析を行った。すなわち、a) ボスのない断面、b) ボス部の断面、そしてc) ボス部にスリットのある断面の3通りである。どのモデルも外形寸法は図中に示す通りであるが、分割された要素は全て1辺が12.5mm正方形である。また、ここでの温度条件は先に示した温度勾配のある棒材のように温度を固定するのではなく、燃焼室側の混合気の温度とクランクシャフト側の空気の温度を同図中に記す値とし、熱伝達がある場合として境界条件を与えた。なお、ここでの熱伝達係数は9000W/m²・Kとした。また、変形解析ではピストンの中央部すなわち $r=0$ となる節点を固定した。

図9に示すのは、上に述べた3種類のモデルにおいてそれぞれ熱伝導解析を行って得られた温度分布の等高線図と、熱伝導による変形解析を行って得られた変形図である。ボス部の断面はボスのない断面に比べて燃焼室側からの熱が溜まりピストン上部の変形が大きい。しかし、ボス部にスリットがある場合はボス部に熱が溜まりにくく、ピストン上部の変形はボスがない場合とほとんど変わりがないといえる。図9に示した各断面での変形図においては線の濃淡で変形前と変形後の区別を示している。また、a1), b1), c1) での dr はそれぞれ、0.139mm, 0.146mm, 0.136mmであり、また dz は-0.112mm, -0.045mm, -0.125mmであった。

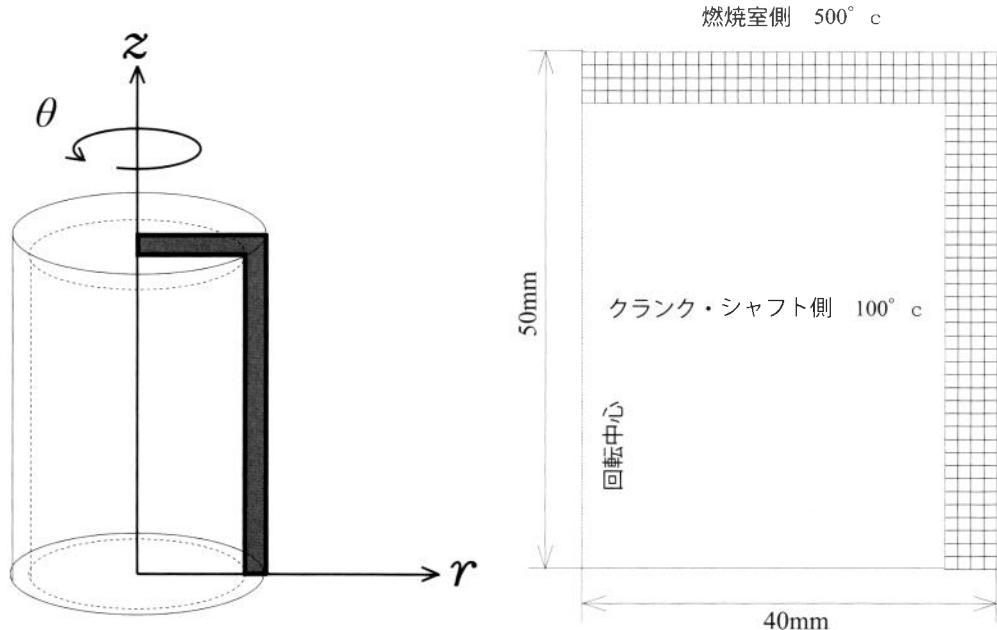


図7 軸対称モデルの扱い方

a) ボスのない部分の断面

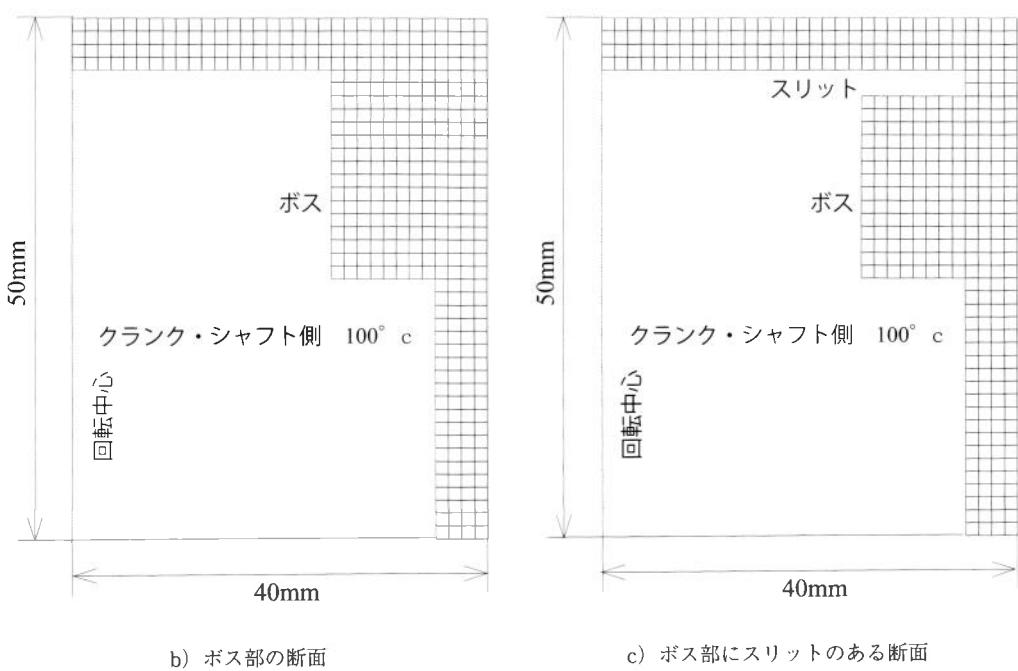
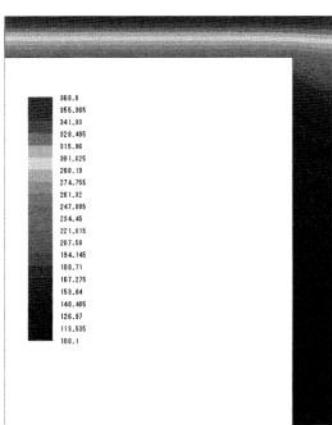
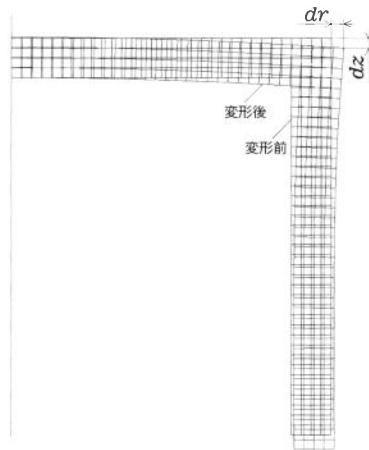


図8 ピストン単体の二次元解析用モデル

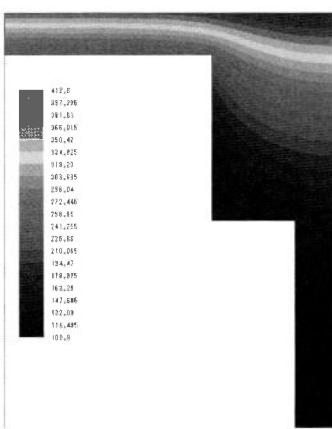
(軸対称解析、各要素は1辺が12.5mmの正方形)



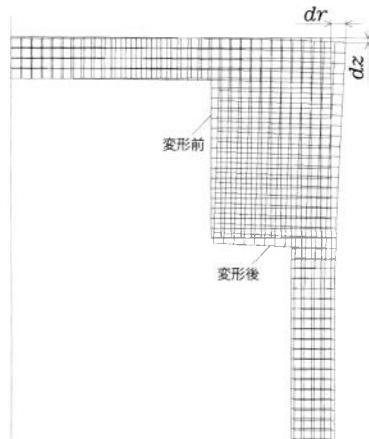
a1) ポスのない断面での温度分布



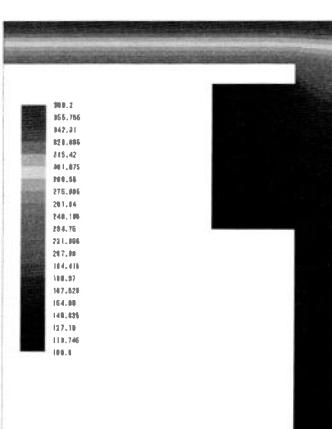
a2) ポスのない断面での変形図



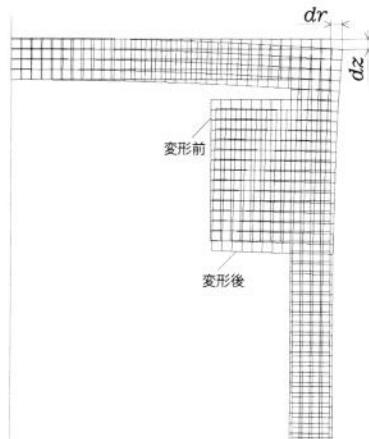
b1) ポス部の断面での温度分布



b2) ポス部の断面での変形図



c1) スリットのあるポス部断面での温度分布



c2) スリットのあるポス部断面での変形図

図9 ピストン単体で解析された各モデルの温度分布の等高線図および変形図

4.2 ピストンおよびピストンリング、シリンダーライナーを組み合わせた二次元解析

前節においては、ピストン単体を想定して熱伝導によるピストンの温度分布と変形解析を行ったが、より稼動状況に近い条件としてピストンリングを取り付けシリンダーライナーと合わせた状態で前節とほぼ同様の解析を行った。材料特性値は表6に示した通りである。また、温度条件は先のピストン単体の場合と同様に燃焼室側の混合気は500°C、クランクシャフト側の空気は100°Cとして、熱伝達がある場合として境界条件を与え、熱伝達係数も前節と同様に9000W/m²·Kとした。また、ここではピストンリングのトップリングから上の部分を燃焼室側、またオイルリングから下の部分をクランクシャフト側としてピストンリングとシリンダーライナーにも気体が接する表面にはピストンと同様の温度条件を与えていた。それから、ウォータージャケットについては外側の表面温度を90°Cに固定した。

また、本節においても前節と同様に軸対称問題として解析を行っているが、前節で図9に示した結果よりスリットつきのボス部の断面については、温度分布の等高線図についても変形図についてもボスのない場合とあまり変わらない結果となることが確認できているので、ここではa)ボスのない場合の断面とb)ボス部の断面の2通りで解析を行うことにした。

上述の2通りの断面について、要素分割したモデルを図10に、また熱伝導解析で得られた温度分布の等高線図、および熱応力解析で得られた変形図を図11にそれぞれ示す。全体的な傾向は、前節で図9に示したピストン単体で確認できた内容とほぼ変わりがないといえるが、ピストンの燃焼室側の熱がピストンリングのトップリングを通じてシリンダーライナーへ伝わっていき、ウォータージャケットで冷却されていることが、どちらの断面についても温度分布の等高線図にてシリンダーライナーの上部で確認できる。

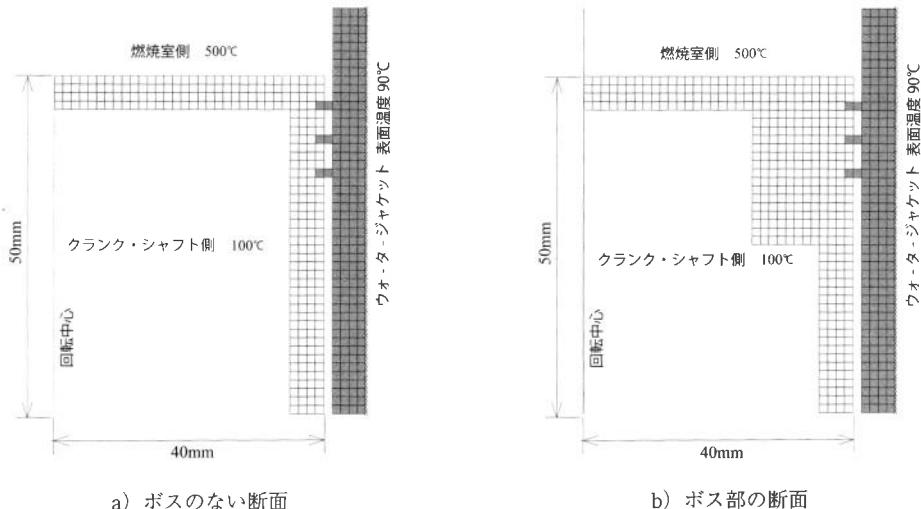
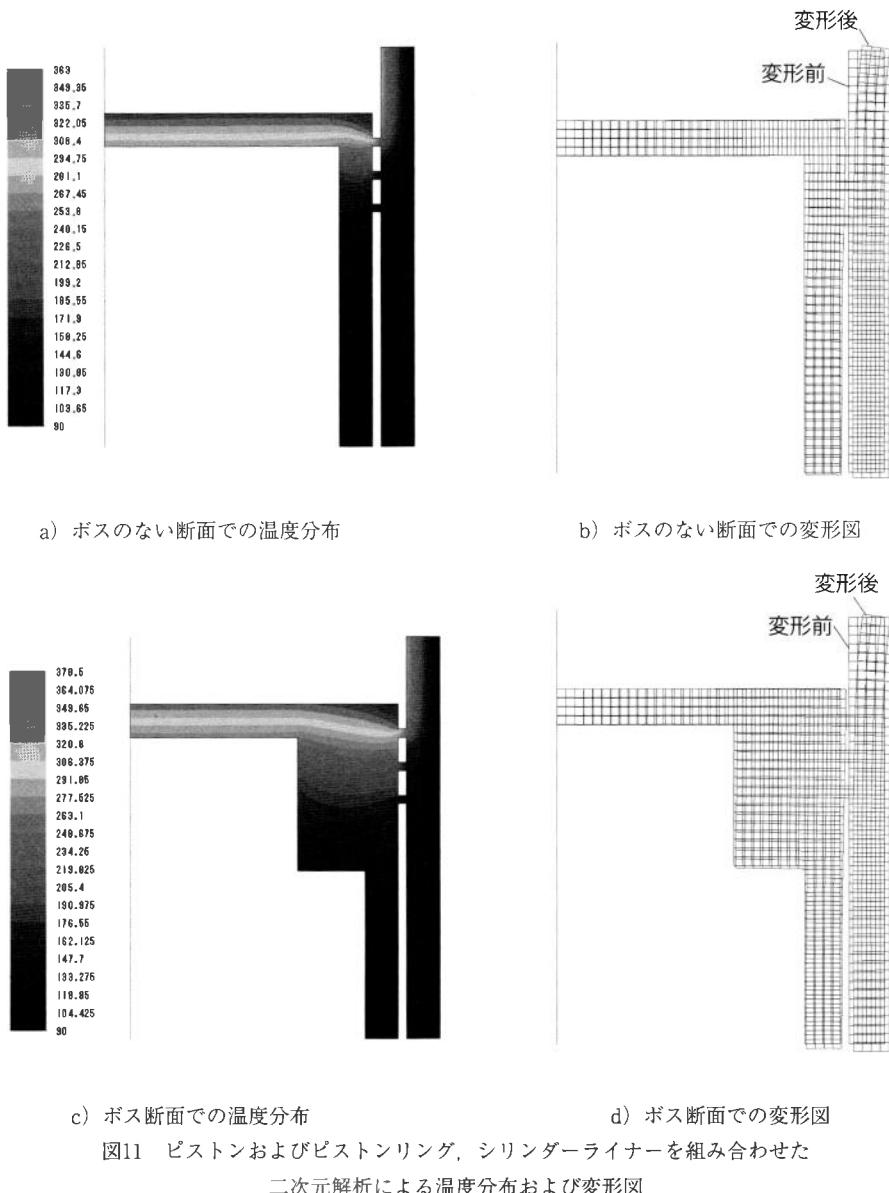


図10 ピストンおよびピストンリング、シリンダーライナーを組み合わせた二次元解析用モデル
(白色要素はアルミニウム、薄グレー色要素は鋳鉄あるいは他の鉄系材料を仮定)



4.3 ピストンおよびピストンリング、シリンダーライナーに関する三次元解析

前節で示したピストンにピストンリングとシリンダーライナーを合わせた解析を三次元解析で行ってみた。一般に三次元解析では二次元解析での平面モデルではなく立体モデルを作成することになり、分割する要素は二次元解析の場合の四角形要素ではなく直方体や扇形に厚みを持たせて立体化した形状など六面体要素がよく用いられる。

ここで用いた三次元解析でのモデル作成と要素分割を行うソフトでは、二次元解析用に作成し

た平面モデルを三次元解析用に拡張する仕様になっているが、具体的には下記に記すような2通りの手法がある。

1. 二次元解析用に作成した平面モデルを、柱状体の断面とみなして柱状体の長さや要素分割の条件を与える。
2. 先に示した軸対称問題のように、二次元解析用に作成した平面モデルを、回転体の断面とみなして回転角度や要素分割の条件を与える。

ここでは、後者の手法により、三次元解析で用いる立体モデルを作成した。ピストン単体のモデルについて、それぞれ作成されたモデルを2通りの角度からの表示を図12に示すが、ピストンを回転体とみなし、回転の中心で90度回転させた4分の1のモデルである。回転させた90度を8分割するように中心から放射状に要素分割を行っているが、8分割の内6分割がボスのない断面の回転であり、残りの2分割がボス部の断面である。実際には、ピストンのボス部の形状が、このように中央から放射状になるように形成されることは考えられないが、ここではモデル作成の便宜上このような形状とした。なお、幾分手間はかかるが、上述の1の手法によればもっと厳密なピストン形状のモデルを作成することは可能であるので、必要があれば今後さらに詳細な解析を行うことも検討している。

また、図13に示すのは、ピストンにピストンリングとシリンダーライナーを合わせたモデルである。三次元解析を行う場合も材料特性値、温度条件、拘束条件などの解析条件は二次元解析の場合と同様に設定した。

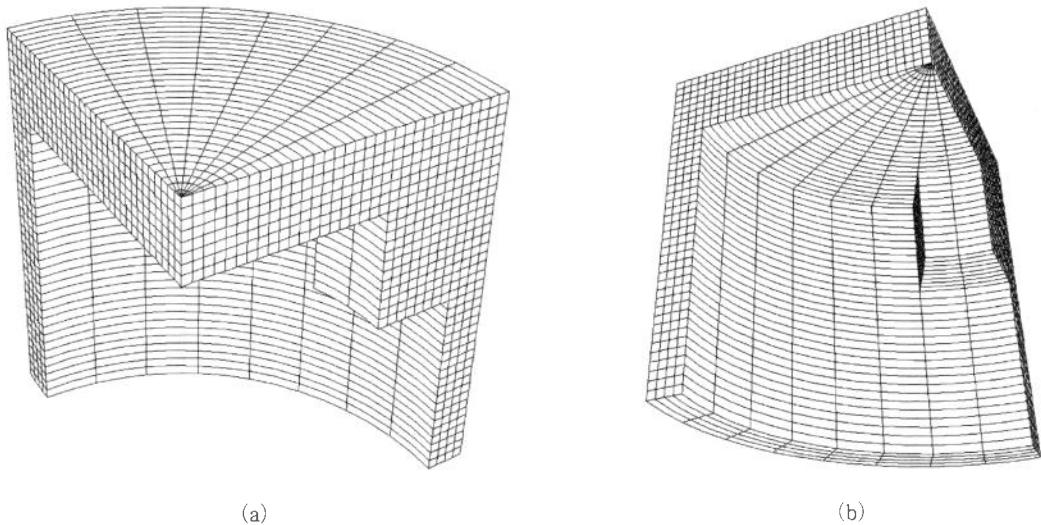


図12 ピストン単体での三次元解析用モデル
(図(a)と図(b)は同一形状であり、違いは表示角度のみ)

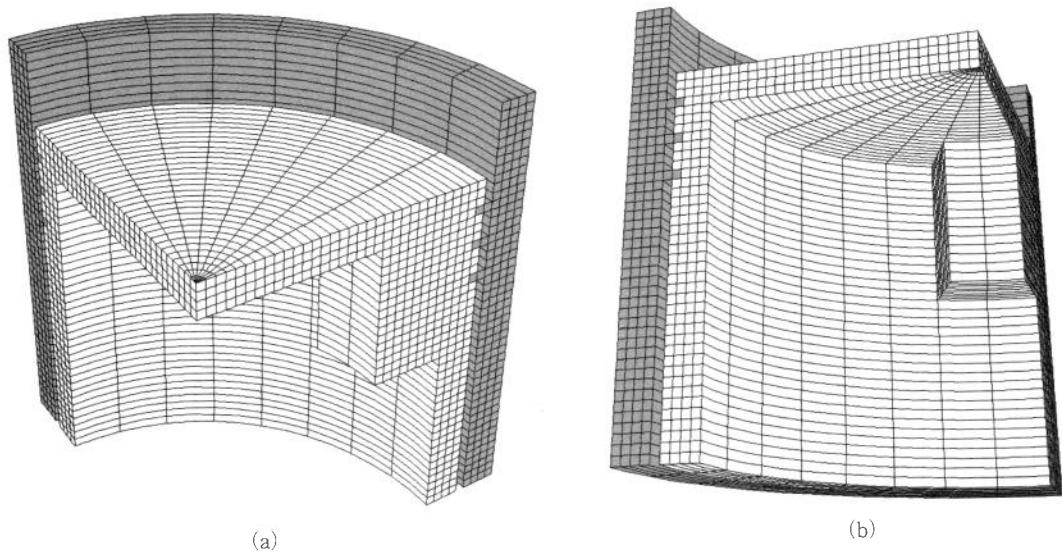


図13 ピストンにピストンリングとシリンダーライナーを合わせた三次元解析用モデル

(図 (a) と図 (b) は同一形状であり、違いは表示角度のみ。)

また白色要素はアルミニウム、薄グレー色は鋳鉄あるいは他の鉄系材料を仮定)

解析を行って得られた温度分布の等高線図および変形図はそれぞれ下記に示す通りであり、先に示した二次元解析で得られた結果と同様の傾向がここでも認められる。

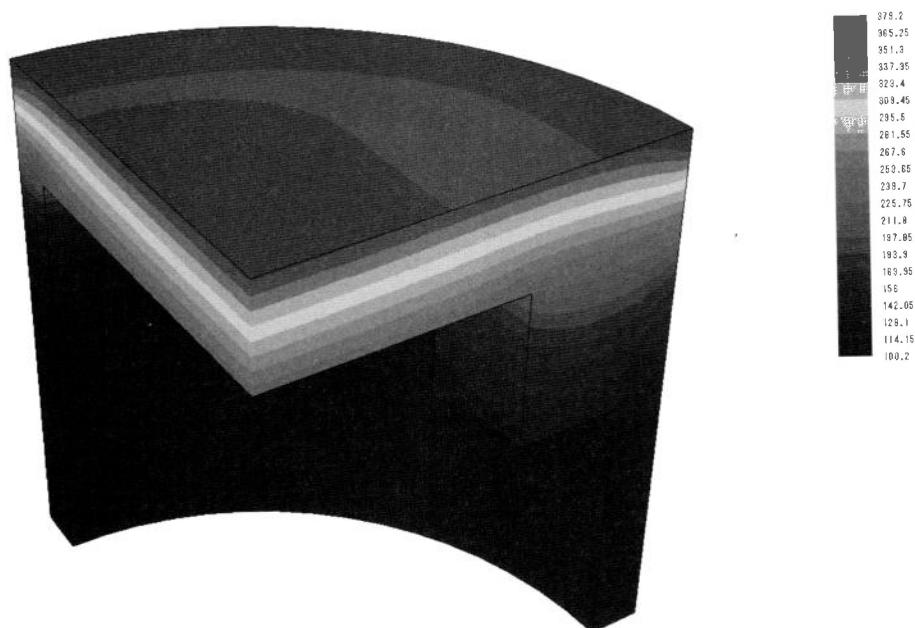


図14 ピストン単体での三次元解析による温度分布

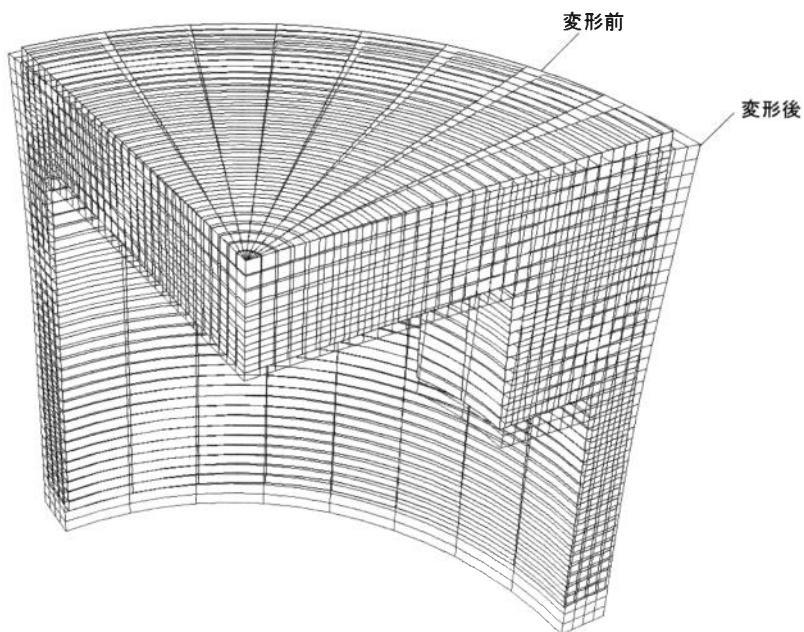


図15 ピストン単体での三次元解析による変位図

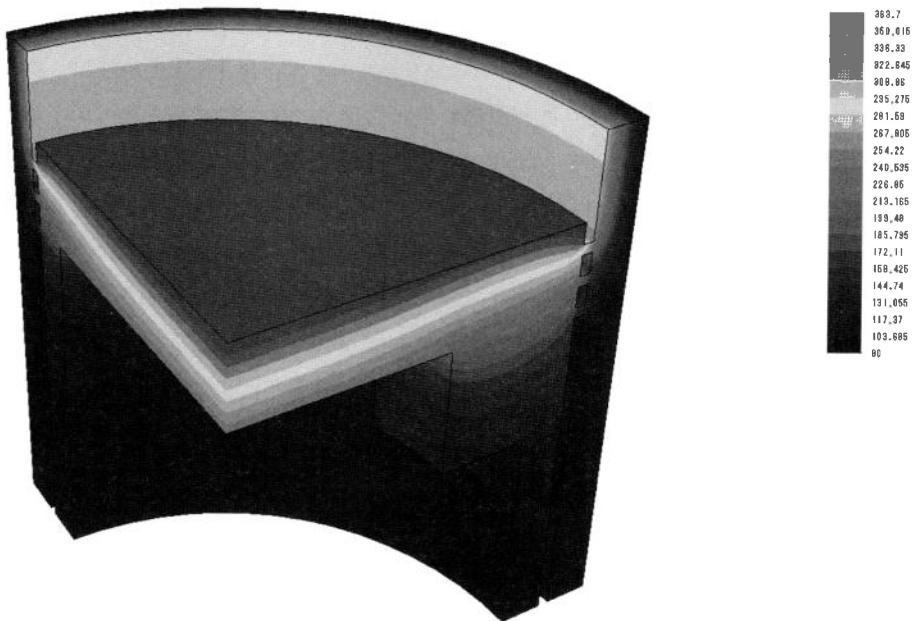


図16 ピストンにピストンリングおよびシリンダーライナーを合わせた三次元解析による温度分布

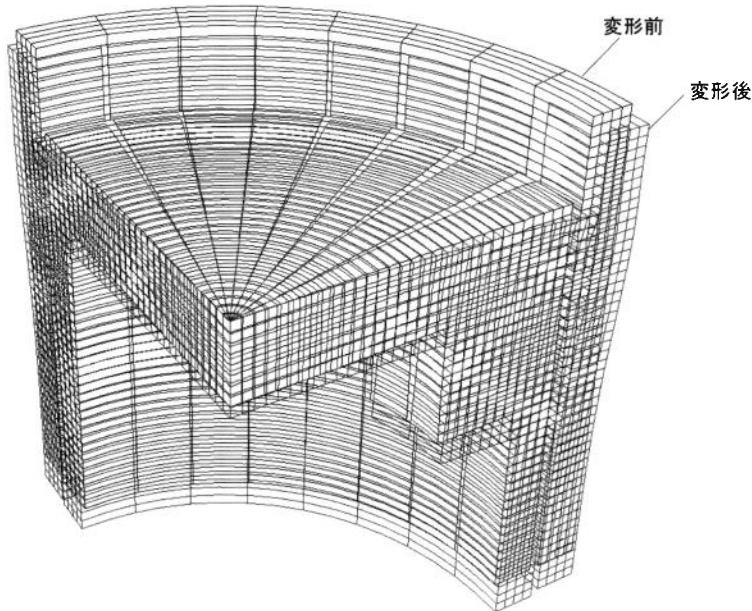


図17 ピストンにピストンリングおよびシリンダーライナーを合わせた三次元解析による変位図

4.4 考察

ここまでに示した解析結果より、緒言で述べたように単純な円筒型のモデルあるいはボス部を想定して部分的に肉厚を大きくしたモデルによって、ピストンに生ずる熱伝導を考慮した温度分布と変形図を各解析で示してきた。

解析結果として既に述べたように、これらの結果は定性的には一般に知られている傾向をよく反映しているといえる。特に、ピストン単体での二次元解析にて、ピストン頭部の変形がボス部の有無に依存することは、自動車材料の分野でよく取り上げられている²⁵⁾。また、ピストンにピストンリングとシリンダーライナーを合わせた二次元解析では、ピストン頭部の熱がピストンリングのトップリングを通じてシリンダーライナーへ逃げていくことも確認できた。さらに、計算に長時間を要する三次元解析においても、二次元解析の場合と同様の傾向が確認できた。

さて、今回行った解析の手法を用いて実際のピストンで測定した数値との対応関係を検討するためには、いくついかの問題点が残されている。本論文では解析によって定性的な傾向を確かめることを目的としていたので、熱伝達による温度条件を与える場合の熱伝達係数は、温度分布が他で示された結果^{26), 27)}と比較して違和感のないように決めた値であった。また、図9の各変形図に記した dr について、解析された数値は実測値より小さめの値であると思われる。したがって、厳密な数値解析を行うのであれば、材料特性値も含めてより詳細な検討が必要である。また、ピストンの形状寸法についても、単純な円筒状では詳細な検討が必ずしも充分であるとはいえない。

今後、ピストンに生ずる応力解析や温度分布に及ぼす冷却方式の影響などを検討するのであれば、実物のピストン形状により近づけたモデルの作成が必要である。

5. 結 言

本論文では、ピストンを想定した単純な円筒型のモデルを用いて、ピストンの燃焼室側とクランクシャフト側に熱伝達による温度条件を与え、温度分布と変形解析を行った。得られた結果は以下に示すとおりである。

1. ピストン単体での二次元解析により、ピストン頭部の変形はボス部の有無に依存する。すなわち、ボス部には熱が溜まりやすいので熱膨張による変形が大きい。また、ボス部と頭部の間にスリットを設けた場合は、ボス部にそれほど熱が溜まらないので、熱膨張による変形の程度はボスがない場合とそれほど変わりがない。
2. ピストンとピストンリング、シリンダーライナーを合わせた二次元解析ではピストンリングのトップリングを通じてシリンダーライナーへ熱が逃げていく傾向が確認された。
3. 二次元解析と同様の内容で解析を行った三次元解析においても、上述1. 2. と同様の傾向が確認された。また、本論文で示した結果は、定性的によく知られている現象を反映しているといえるが、解析結果と実測値の定量的な検討を行うための課題について考察した。

参 考 文 献

- 1) M.J.Turner, R.W.Clough, H.C.Martin and L.J.Toop, Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. J. Aero Sci.,23,pp805-823,1956.
- 2) O.C.ツエンキーヴィッツ, Y.K.チェーン, 吉岡雅夫(監訳), マトリックス有限要素法, 培風館(1970)
- 3) I.ホランド,K.ベル, 河合忠彦(監訳), 有限要素法-応力解析への応用, 朝倉書店(1972)
- 4) 三好敏郎, 白鳥正樹, 座古勝, 坂田信二, 有限要素法 構造要素の変形・破壊挙動の解析, 実教出版, (1976)
- 5) 三好敏郎, 有限要素法入門, 培風館, (1978)
- 6) 日本材料学会編集, 改定・初心者のための有限要素法, 日本材料学会(2001)
- 7) CAD/CAE研究会, ANSYS工学解析入門, 理工学社(2001)
- 8) 黒田英夫, 基礎からの数値解析-初歩から「有限要素法」による解析まで, 工学社(2010)
- 9) J.J.Connor,C.A.Brebbia, 奥村敏恵(監訳), 流体解析への有限要素法の応用, サイエンス社, (1978)
- 10) 矢川元基, 流れと熱伝導の有限要素法解析, 培風館(1983)
- 11) 坪井始, 内藤督, 数値電磁界解析法の基礎, 養賢堂(1994)
- 12) 坪井始, 内藤督, 実践数値電磁界解析法, 養賢堂(1995)
- 13) 宮本博, 3次元弾性論, 裳華房(1967)
- 14) J.F.Knott, 宮本博訳, 破壊力学の基礎, 培風館(1977)
- 15) L.T.Anderson, 粟飯原周二(監訳), 破壊力学基礎と応用 第3版, 森北出版(2011)
- 16) 村上裕則, 大南正瑛, 岩清水幸夫, 中山英明, 破壊力学入門, オーム社(1974)
- 17) 岡村弘之, 線形破壊力学入門, 培風館(1976)
- 18) D. Break, Elementary Engineering Fracture Mechanics, Martinus Nijhoff Publishers (1982)
- 19) N.L. Muskhelishvili, Some Basic Problem of the Mathematical Theory of Elasticity, Kluwer (1977)
- 20) S.P. Timoshenko, J.N. Goodier, Theory of Elasticity Third Edition, McGRAW-HILL International Book

Company (1983)

- 21) 八田夏夫, 基礎流体力学, 恒星社厚生閣 (1983)
- 22) 水野明哲, 流れの数値解析入門, 朝倉書店 (1990)
- 23) 森下悦生, Excelで学ぶ流体力学, 丸善出版 (2000)
- 24) 加藤泰世, 平石康仁, スーパーFJのウイングに関する空力的考察, 自動車整備技術に関する研究報告誌 第42号, pp.39-44 (2013)
- 25) 高行男, 自動車材料入門, 東京電機大学出版局 (2009)
- 26) 古濱庄一, 内燃機関, 森北出版 (1978)
- 27) ロバート・ボッシュ, 小口泰平 (監修), ボッシュ自動車ハンドブック日本語第3版, 日経BP (2011)
- 28) 石川義和, 自動車ガソリンエンジン設計の要諦, 山海堂 (2002)
- 29) 三浦登, 福田水穂, 自動車設計と解析シミュレーション, 培風館 (1990)
- 30) 一色尚次, 北山直方, 伝熱工学, 森北出版 (1971)
- 31) 平修二 (監修), 現代 材料力学, オーム社, (1970)
- 32) 平修二 (監修), 現代 弾性力学, オーム社, (1974)
- 33) 国尾武, 固体力学の基礎, 培風館 (1977)
- 34) 井上達雄, 弾性力学の基礎, 日刊工業新聞社 (1979)